DIDYSIS MATEMATIKOS ŽINYNAS

ŠVIESA

DIDYSIS **MATEMATIKOS** ŽINYNAS

Formulės, taisyklės, teoremos, uždaviniai ir jų sprendimai



ŠVIESA KAUNAS

UDK 51(031)
Di-72

Großes Handbuch Mathematik
Compact Verlag
ISBN 3-8174-7428-8

Teksto autorius MANFRED HOFFMANN

Iš vokiečių kalbos vertė
prof. habil. dr. VIDMANTAS PEKARSKAS

Pirmasis leidimas 2007

DIDYSIS MATEMATIKOS ŽINYNAS
Formulės, taisyklės, teoremos, uždaviniai ir jų sprendimai
Autorius **Manfred Hoffmann**

Redaktorė *Rozita Znamenskaitė*

Tir. 3000 egz. Leid. Nr. 16 176. Užsak. Nr. 2175.
Uždaroji akcinė bendrovė leidykla „Šviesa",
E. Ožeškienės g. 10, LT-44252 Kaunas.
El. p. mail@sviesa.lt
Interneto puslapis http://www.sviesa.lt
Spausdino AB „Spauda", Laisvės pr. 60,
LT-05120 Vilnius.
Sutartinė kaina

Di-72 **Didysis** matematikos žinynas: formulės, taisyklės, teoremos, uždaviniai ir jų sprendimai / Manfred Hoffmann. – Šviesa, 2007. – 384 p.: iliustr., brėž., lent.

R-klė: p. 376–384.

ISBN 5-430-04814-3

Leidinyje rasite reikalingiausią informaciją iš visų šiuolaikinės matematikos sričių. Pateikiamos formulės, taisyklės, teoremos, būdingiausi uždaviniai ir jų sprendimai. Puiki parankinė priemonė mokiniui ir studentui.

UDK 51(031)

ISBN 5-430-04814-3

Turinys

Pratarmė 9

1. Matematinės logikos ir aibių teorijos elementai 11
1.1. Teiginiai 11
1.2. Aibės 16
1.3. Teiginio funkcijos 21

2. Aritmetika 25
2.1. Natūralieji skaičiai 25
2.2. Veiksmai su natūraliaisiais skaičiais 26
2.3. Sudėtingi skaitiniai reiškiniai 28
2.4. Daliklis 29
2.5. Bendrasis kartotinis 31
2.6. Sveikieji skaičiai 32
2.7. Veiksmai su sveikaisiais skaičiais 34
2.8. Racionalieji skaičiai 37
2.9. Veiksmai su racionaliaisiais skaičiais 39
2.10. Dešimtainės trupmenos 41
2.11. Dydžiai ir vienetai 44

3. Algebra 46
3.1. Sąryšiai 46
3.2. Struktūros 47
3.3. Sveikųjų skaičių žiedas 48
3.4. Racionaliųjų skaičių kūnas 49
3.5. Algebriniai reiškiniai 50
3.6. Lygtys 55
3.7. Nelygybės 64
3.8. Netiesinės sistemos 67
3.9. Tiesinės sistemos 68
3.10. Determinantai 73

3.11. Matricos ... 78
3.12. Realieji skaičiai ... 81
3.13. Kvadratinės šaknys ... 86
3.14. Laipsniai ... 88
3.15. Rodiklinės lygtys ... 94
3.16. Logaritmai ... 95
3.17. Logaritminės lygtys ... 97
3.18. Matematinė (pilnoji) indukcija ... 98

4. Funkcijos ... 102
4.1. Pagrindinės sąvokos ... 102
4.2. Monotoninės funkcijos ... 109
4.3. Veiksmai su funkcijomis ... 111
4.4. Atvirkštinės funkcijos ... 114
4.5. Tiesinės funkcijos ... 116
4.6. Kvadratinės funkcijos ... 119
4.7. Sveikosios racionaliosios funkcijos ... 124
4.8. Trupmeninės racionaliosios funkcijos ... 127
4.9. Laipsninės funkcijos ... 132
4.10. Rodiklinės funkcijos ... 136
4.11. Logaritminės funkcijos ... 137
4.12. Funkcijos, apibrėžiamos keliais reiškiniais ... 139
4.13. Skaičių sekos ... 143
4.14. Sekų ribos ... 148
4.15. Eilutės ... 149
4.16. Funkcijų ribos ... 151
4.17. Asimptotės ... 155

5. Finansų matematika ... 157
5.1. Procentų skaičiavimas ... 157
5.2. Sudėtiniai procentai ... 158
5.3. Amortizacija ... 159
5.4. Rentos ... 163
5.5. Paskolos grąžinimas ... 165

6. Skaičiavimo sistemos ... 166
6.1. Dešimtainė sistema ... 166
6.2. Dvejetainė sistema ... 166
6.3. Šešioliktainė sistema ... 170
6.4. Dvejetainis dešimtainis kodas ... 174

7. Kompleksiniai skaičiai ... 178
7.1. Menamieji skaičiai ... 178
7.2. Kompleksiniai skaičiai ... 178
7.3. Veiksmai su kompleksiniais skaičiais ... 179
7.4. Grafinis vaizdavimas ... 182
7.5. Šaknys ir laipsniai ... 185
7.6. Šaknies geometrinė prasmė ... 187
7.7. Pagrindinė algebros teorema ... 189

8. Planimetrija ... 190
8.1. Pagrindinės sąvokos ... 190
8.2. Trikampis ... 193
8.3. Veidrodinis atspindys ašies atžvilgiu (ašinė simetrija) ... 196
8.4. Pagrindiniai brėžimo uždaviniai ... 197
8.5. Ypatingieji trikampiai ... 199
8.6. Trikampių brėžimas ... 203
8.7. Veidrodinis atspindys taško atžvilgiu (centrinė simetrija) ... 207
8.8. Keturkampiai ... 208
8.9. Daugiakampiai ... 214
8.10. Posūkis ... 215
8.11. Apskritimas ... 215
8.12. Apskritimo ilgis, skritulio plotas ... 219
8.13. Atkarpų santykiai ... 224
8.14. Centrinis ištempis ... 227
8.15. Panašumas ... 228

9. **Trigonometrija** 233
9.1. Kampų matavimas 233
9.2. Stačiojo trikampio trigonometrinės funkcijos 235
9.3. Sąryšiai 237
9.4. Bet koks kampas 238
9.5. Sudėties teoremos 243
9.6. Bet kokio kampo trigonometrinės funkcijos 245
9.7. Trigonometrinės lygtys 247

10. **Stereometrija** 251
10.1. Bendrosios taisyklės 251
10.2. Kubas, stačiakampis gretasienis, prizmė 252
10.3. Piramidė 254
10.4. Ritinys, kūgis 256
10.5. Rutulys 258
10.6. Rutulio dalys 259

11. **Vektorinis skaičiavimas** 261
11.1. Lygiagretusis postūmis 261
11.2. Vektoriai 261
11.3. Tiesinė vektorių erdvė 262
11.4. Tiesinis priklausomumas 264
11.5. Vektoriaus reiškimas koordinatėmis 266
11.6. Geometriniai taikymai 272
11.7. Vektorinė sandauga 273
11.8. Mišrioji sandauga 276

12. **Analizinė geometrija** 278
12.1. Plokštumos tiesės lygtys 278
12.2. Erdvės tiesės lygtys 280
12.3. Plokštumos lygtys 284
12.4. Padėties sąryšiai 287
12.5. Sfera 292

13. Kūgio pjūviai plokštumoje ... 293
13.1. Apskritimas ... 293
13.2. Elipsė ... 294
13.3. Hiperbolė ... 295
13.4. Parabolė ... 296
13.5. Bendroji kūgio pjūvio lygtis ... 297

14. Atvaizdžiai ... 298
14.1. Afinieji atvaizdžiai ... 298
14.2. Panašumo atvaizdžiai ... 299
14.3. Kongruentieji (lygumo) atvaizdžiai ... 300

15. Diferencialinis skaičiavimas ... 302
15.1. Diferencijavimas ... 302
15.2. Išvestinės ... 303
15.3. Kreivių tyrimas ... 306
15.4. Ekstremumo uždaviniai ... 310
15.5. Vidurinių reikšmių teoremos ... 311

16. Integralinis skaičiavimas ... 313
16.1. Pirmykštės funkcijos ... 313
16.2. Apibrėžtiniai integralai ... 314
16.3. Integravimo metodai ... 315
16.4. Ploto skaičiavimas ... 318
16.5. Taikymai fizikoje ... 321
16.6. Kūnų elementų skaičiavimas ... 322

17. Stochastika ... 324
17.1. Duomenų rinkimas ... 324
17.2. Dažnių skirstinys ... 325
17.3. Vidurinės reikšmės ... 330
17.4. Sklaidos matai ... 332
17.5. Atsitiktinis eksperimentas ... 334

17.6. Įvykiai ... 336
17.7. Dažnis ... 338
17.8. Tikimybė ... 338
17.9. Kombinatorika ... 341
17.10. Tikimybių skirstinys ... 344
17.11. Skirstinio parametrai ... 347
17.12. Binominis skirstinys ... 350
17.13. Puasono skirstinys ... 352
17.14. Normalusis skirstinys ... 352
17.15. Hipergeometrinis skirstinys ... 355
17.16. Imtys ... 356

Uždaviniai ... 357

Sprendimai ... 362

Priedas ... 370

Dalykinė rodyklė ... 376

Pratarmė

Matematikos pradžia slypi priešistorėje. Daug matematikos sąvokų, kurias nelabai pakitusias iš senųjų laikų vartojame šiandien, buvo atrastos ir pritaikytos ankstesniųjų civilizacijų. Kėlimas laipsniu, apibrėžtas kaip vienodų daugiklių sandauga, jau buvo žinomas trečiajame tūkstantmetyje pr. Kr. babiloniečiams ir egiptiečiams, kurie naudojo sutrumpintą šio veiksmo užrašą. Antrajame tūkstantmetyje pr. Kr. arabai jau mokėjo apskaičiuoti šaknis. Šaknų artinius 500 m. pr. Kr. nagrinėjo indai. Tuo metu matematiškai išsprendžiamos problemos jau buvo apibūdinamos lygtimis, kurios spręstos labai panašiais metodais kaip ir šiandien. Geometrija užgimė 2000 m. pr. Kr. Egipte ir Mesopotamijoje, nes matininkams reikėjo išmokti atkurti žemės sklypų ribas, išnykstančias patvinus didžiosioms upėms.

Trigonometrijai atsirasti postūmį davė astronomija. Graikas Aristarchas Samietis 270 m. pr. Kr. pasitelkęs stačiuosius trikampius apskaičiavo atstumus, kuriais nutolę vienas nuo kito Saulė, Mėnulis ir Žemė.

Apie 500 m. pr. Kr. Graikijoje patikslinta skaičiaus sąvoka ir įvesti natūralieji skaičiai. Pitagoriečiams jau buvo žinoma, kad egzistuoja iracionalieji skaičiai. Šis faktas visada buvo svarbus geometrijoje, kurios išsklaidytus rezultatus surinko į vieną visumą ir sistematizavo Euklidas. Išmokta geometriškai vaizduoti iracionaliuosius skaičius atkarpomis, o tai neįmanoma be natūraliųjų skaičių sąvokos. Iki pat naujųjų laikų Euklido veikalas buvo laikomas geometrijos vadovėlio etalonu.

XV a. po Kr. pradėjo rutuliotis šiandien žinomos matematikos sritys. Čia triūsė daug žymių matematikų, tokių kaip Niutonas, Leibnicas, Oileris ir Gausas, kurie plėtodami analizę nagrinėjo funkcijų savybes. XVII a. Dekartas pagrindė analizinę geometriją, sugalvodamas koordinačių metodą, leidžiantį geometrinius sąryšius apibūdinti algebros priemonėmis. Algebra, kuri iki tol nagrinėjo tik algebrinius veiksmus ir lygčių sprendimą, tapo svarbiu instrumentu, galinčiu apibūdinti matematines struktūras.

Dauguma moderniosios matematikos sąvokų remiasi teiginių logika ir aibių teorija. Aibių teoriją pagrindė Georgas Kantoras. Jam turime būti dėkingi už tai, kad aibių teorijoje išmokta operuoti „begalinėmis“ aibėmis.

Stochastika, kaip matematikos sritis, išplėtota ir sistematizuota XX a. Matematikos metodais naudojasi daugelis mokslo šakų, pavyzdžiui, medicina, biologija arba sociologija. Matematinėmis žiniomis pagrįsta daug šiuolaikinės fizikos ir chemijos sričių.

1. Matematinės logikos ir aibių teorijos elementai

1.1. Teiginiai

Sakinys ir teiginys

Jeigu sakiniui p (jis gali būti nusakytas žodžiais arba apibūdintas matematine formule) galima priskirti teisingumo reikšmę (T – teisingas arba K – klaidingas), tai šis sakinys yra teiginys.

Teiginius nagrinėja matematinė logika.

Pavyzdžiai

Sakinys „Šventoji įteka į Baltijos jūrą“ – teisingas teiginys.

Sakinys „$3 + 4 = 7$“ – teisingas teiginys.

Sakinys „6 yra pirminis skaičius“ – klaidingas teiginys.

Klausimui „Kiek tau metų?“ negalima priskirti teisingumo reikšmės, todėl jis nėra teiginys.

Teiginio neiginys

Neigiant teiginį p, gaunamas teiginys $\neg p$ (skaitome: ne p arba netiesa, kad p), kuris vadinamas teiginio p neiginiu.

Teisingo teiginio neiginys yra klaidingas, o klaidingo – teisingas.

Pavyzdžiai

p: „Tiesės g ir h susikerta.“

$\neg p$: „Tiesės g ir h nesusikerta.“

$\neg(\neg p)$: „Netiesa, kad tiesės g ir h nesusikerta.“

Galima sudaryti daug naujų teiginių susiejant teiginius vieną su kitu loginėmis jungtimis (jungiamaisiais žodžiais). Taip vėl gaunami teiginiai, tačiau sudėtingesnės struktūros. Paprasčiausios sąsajos yra: konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalentumas ir griežtoji disjunkcija.

Dviejų teiginių konjunkcija

Sujungus du teiginius p ir q žodžiu „ir“ arba kitu tos pačios prasmės žodžiu, gaunama teiginių p ir q konjunkcija, kuri žymima taip: $p \wedge q$ (skaitoma: p ir q).

Konjunkcijos teisingumo reikšmių lentelė:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	K	K
K	T	K
K	K	K

Konjunkcija teisinga tik tada, kai teisingi abu jungiami teiginiai.

Pavyzdžiai

Teisingo teiginio p „128 yra lyginis skaičius“ bei klaidingo teiginio q „128 dalijasi iš 3“ konjunkcija yra klaidingas teiginys $p \wedge q$: „128 yra lyginis ir dalus iš 3 skaičius“ (teisingumo reikšmių lentelės 2 eilutė).

Klaidingas teiginys „Jupiteris yra žvaigždė ir jo masė yra mažesnė negu Žemės“ yra klaidingų teiginių „Jupiteris yra žvaigždė“ bei „Jupiterio masė mažesnė negu Žemės“ konjunkcija (teisingumo reikšmių lentelės 4 eilutė).

Dviejų teiginių disjunkcija

Sujungus du teiginius p ir q žodžiu „arba“ arba kitu tos pačios prasmės žodžiu, gaunama teiginių p ir q disjunkcija, kuri žymima taip: $p \vee q$ (skaitoma: p arba q, arba abu).

Pavyzdžiai

Teisingo teiginio „$0 < 5$“ ir klaidingo teiginio „$0 = 5$“ disjunkcija yra teisingas teiginys „$0 \leq 5$“ (teisingumo reikšmių lentelės 2 eilutė).

Teisingas teiginys „Arba Žemė yra kubas, arba Saulė yra žvaigždė“ yra klaidingo teiginio „Žemė yra kubas“ ir teisingo teiginio „Saulė yra žvaigždė“ disjunkcija (teisingumo reikšmių lentelės 3 eilutė).

Disjunkcijos teisingumo reikšmių lentelė:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	K	T
K	T	T
K	K	K

Disjunkcija klaidinga tik tada, kai klaidingi abu teiginiai.

Dviejų teiginių implikacija

Sujungus du teiginius p ir q žodžiu „tai“ arba kitu tos pačios prasmės žodžiu, gaunama teiginių p ir q implikacija, kuri žymima taip: $p \to q$ (skaitoma: iš p išplaukia q arba jei p, tai q).

Implikacijos sąryšį galima užrašyti ir taip: $\neg p \vee q$ (skaitoma: ne p arba q). Taip pat sakoma: sąlyga q yra būtina, kad galiotų sąlyga p, sąlyga p yra pakankama, kad galiotų sąlyga q.

Implikacijos teisingumo reikšmių lentelė:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	K	K
K	T	T
K	K	T

Pavyzdžiai

Teisingo teiginio „Šviesos greitis yra apie 300 000 km/s“ ir klaidingo teiginio „Garso greitis yra didesnis už šviesos greitį“ implikacija yra klaidingas teiginys „Garso greitis yra didesnis už 300 000 km/s“ (teisingumo reikšmių lentelės 2 eilutė).

Klaidingo teiginio „2 = 3“ ir teisingo teiginio „0 = 0“ implikacija yra teiginys „Jei 2 = 3, tai 0 = 0“, kuris pagal apibrėžimą laikomas teisingu teiginiu (teisingumo reikšmių lentelės 3 eilutė).

„Jei $4 < 3$, tai $5 < 4$" yra teisingas teiginys, kadangi jis yra dviejų klaidingų teiginių implikacija (teisingumo reikšmių lentelės 4 eilutė).

Dviejų teiginių ekvivalentumas

Sujungus du teiginius p ir q žodžių deriniu „tada ir tik tada" arba kitu tos pačios prasmės žodžių deriniu, gaunamas teiginių p ir q ekvivalentumo sąryšis, simboliais užrašomas taip: $p \leftrightarrow q$ (skaitoma: p ekvivalentu q).

Ekvivalentumo sąryšio teisingumo reikšmių lentelė:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	*T*	*T*
T	*K*	*K*
K	*T*	*K*
K	*K*	*T*

Ekvivalentumo sąryšį galima užrašyti taip: $(\neg\, p \vee q) \wedge (\neg\, q \vee p)$ (skaitoma: tiek ne p arba q, tiek ir ne q arba p). Dar sakoma: jei p, tai q ir atvirkščiai. Taip pat sakoma: sąlyga p yra būtina ir pakankama, kad galiotų sąlyga q.

Dviejų teiginių ekvivalentumo sąryšis yra teisingas teiginys tik tada, kai abu teiginiai yra arba teisingi, arba klaidingi.

Pavyzdžiai

Sujungus ekvivalentumo sąryšiu teisingą teiginį, nusakomą teorema apie stačiojo trikampio aukštinę, su klaidingu teiginiu „Visos stačiojo trikampio kraštinės yra vienodo ilgio", gaunamas klaidingas teiginys „Visos stačiojo trikampio kraštinės yra vienodo ilgio tada ir tik tada, kai galioja teorema apie stačiojo trikampio aukštinę" (teisingumo reikšmių lentelės 2 eilutė).

Sujungus ekvivalentumo sąryšiu klaidingą teiginį „Kilogramas yra ilgio vienetas" su teisingu teiginiu „Kilometrą sudaro 1000 metrų", gaunamas teiginys „Kilogramas yra ilgio vienetas tada ir tik tada, kai kilometrą sudaro 1000 metrų", kuris laikomas klaidingu (teisingumo reikšmių lentelės 3 eilutė).

Griežtoji dviejų teiginių disjunkcija

Sujungus du teiginius p ir q žodžiu „arba“ arba kitu tos pačios prasmės žodžiu griežtąja prasme, gaunama griežtoji dviejų teiginių p ir q disjunkcija, kuri žymima taip: $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$. Vartojamas ir ankstesnis disjunkcijos žymėjimas: $p \vee q$.

Griežtosios disjunkcijos teisingumo reikšmių lentelė:

p	q	$p \vee q$
T	T	K
T	K	T
K	T	T
K	K	K

Griežtoji dviejų teiginių disjunkcija teisinga tik tada, kai vienas teiginys yra teisingas, o kitas – klaidingas.

Pavyzdys

Sujungus teisingą teiginį „Traukinys važiuoja į Vilnių“ su klaidingu teiginiu „Traukinys važiuoja į Kauną“, gaunamas teisingas teiginys „Traukinys važiuoja arba į Vilnių, arba į Kauną“ (teisingumo reikšmių lentelės 2 eilutė).

Teiginių sąryšių taisyklės

Veiksmams su teiginiais galioja taisyklės, formaliai panašios į veiksmų su skaičiais dėsnius.

Perstatomumo (komutatyvumo) dėsnis:

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \leftrightarrow q \vee p.$$

Jungiamumo (asociatyvumo) dėsnis:

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r),$$
$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r).$$

Skirstomumo (distributyvumo) dėsnis:

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$
$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Sugerties (absorbcijos) dėsnis:

$$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p, \quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p.$$

Prieštara:

$$p \wedge (p \vee \neg p) \leftrightarrow p.$$

($p \land \neg p$ vadinama kontradikcija (prieštara), $p \lor \neg p$ – tautologija.)

De Morgano taisyklės:

$$\neg (p \land q) \leftrightarrow \neg p \lor \neg q; \qquad \neg (p \lor q) \leftrightarrow \neg p \land \neg q.$$

1.2. Aibės

Apibrėžimas

Abstrakti aibės sąvoka priklauso universalioms pagrindinėms matematikos sąvokoms. Georgas Kantoras, aibių teorijos kūrėjas, aibę suprato kaip „bet kokią apibrėžtų objektų sankaupą, kurią galima suvokti kaip vieningą visumą“.

Vadinasi:

a) aibė yra nusakyta, jeigu apie bet kurį objektą galima pasakyti, priklauso jis tai aibei ar ne;

b) objektas, kaip aibės elementas, negali joje kartotis.

Pavyzdžiai

Tam tikro studijų proceso dalyviai yra vieninga visuma, todėl jie sudaro aibę.

Natūralieji skaičiai irgi yra vieninga visuma, todėl ir jie sudaro aibę.

Šnekamojoje kalboje vartojami žodžių deriniai „dulkių aibė“, „oro aibė“, „vandens aibė“ nenusako aibės taip, kaip ji suprantama matematikoje, nes ne visai aišku, kokie objektai joms priklauso.

Abstraktieji objektai 3, $\sqrt{9}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{12}{4}$ sudaro vienaelementę aibę, nes jie yra lygūs vienas kitam.

Tuščioji aibė – tai aibė, kuriai nepriklauso joks konkretus arba abstraktus objektas. Ji žymima simboliu $\varnothing$.

M yra aibė, jeigu su kiekvienu konkrečiu arba abstrakčiu objektu x sakinys $x \in M$ (skaitome: x priklauso M) yra teisingas arba klaidingas teiginys.

Jeigu sakinys $x \in M$: su visais x yra klaidingas, tai M yra tuščioji aibė;
yra teisingas, kai elementų x skaičius yra baigtinis, tai M yra baigtinė aibė;
yra teisingas, kai elementų x yra be galo daug, tai M yra begalinė aibė.

Sakinio $x \in M$ neiginys žymimas taip: $x \notin M$ (skaitoma: x nepriklauso M).

Aibių užrašymas

Išvardijamoji forma: objektų simboliai surašomi tarp dviejų riestinių skliaustų, atskiriant vieną nuo kito kableliais.

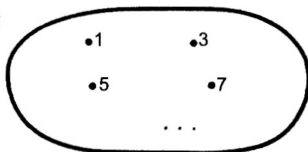
Pavyzdžiai: $M = \{a, b, c, d\}$;
$B = \{3\}$;
$P = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$;
$N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Žymimoji forma: tarp dviejų riestinių skliaustų užrašomas požymis, leidžiantis atsirinkti, ar tam tikras objektas priklauso aibei, ar ne.

Pavyzdžiai: $P = \{p \mid p$ – pirminis skaičius$\}$;
$M = \{x \mid x$ yra lengvasis automobilis su lietuviškais numeriais$\}$.

Veno diagrama: aibės elementai vaizduojami plokštumos dalies, apribotos uždara kreive, taškais.

Veno diagrama (Oilerio diagrama):



Poaibiai

Kai visi aibės A elementai yra aibės B elementai, tai A yra B poaibis; žymima $A \subset B$. Galimi du atvejai:

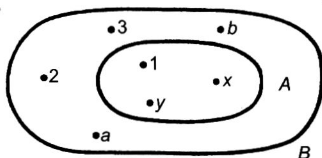
a) A yra tikrinis B poaibis, jeigu $A \subset B$ ir aibėje B dar yra bent vienas nepriklausantis A elementas;

b) A yra netikrinis B poaibis, jeigu $A \subset B$ ir aibėje B nėra elementų, kurie nepriklausytų A.

$$\boxed{A \subset B \leftrightarrow (x \in A \to x \in B).}$$

Pavyzdžiai: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \subset B$;
$A = \{x \mid x$ yra Prancūzijos miestas$\}$, $B = \{y \mid y$ yra Europos miestas$\}$, $A \subset B$;

$A = \{1, x, y\}$,
$B = \{1, 2, 3, a, b, x, y\}$,
$A \subset B$.



Lygiosios aibės

Dvi aibės A ir B yra lygios, kai kiekvienas aibės A elementas kartu yra ir aibės B elementas. Žymima $A = B$.

$$\boxed{A = B \leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).}$$

Pavyzdžiai: $A = \{x \mid x$ yra teigiamas skaičiaus 12 daliklis$\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A = B$;
$A = \{3\}$, $B = \{\sqrt{9}\}$, $A = B$;
$A = \{n \mid n \in N \wedge n < 0\}$, $B = \varnothing$, $A = B$.

Dviejų aibių sankirta

Dviejų aibių A ir B sankirta vadinama aibė, sudaryta iš visų objektų, priklausančių tiek A, tiek ir B.

Žymima $A \cap B$ (skaitoma: A ir B sankirta).

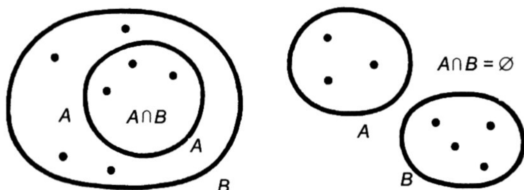
$$\boxed{x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.}$$

Pavyzdžiai

$A = \{6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \to A \cap B = \{6, 8\}$;
$P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{x, y, z\} \to P \cap Q = \varnothing$ (tuščioji aibė);

$C = \left\{\sqrt{9},\ 4,\ 3^3\right\},\ D = \left\{\frac{9}{3},\ 1,\ 4^2\right\} \rightarrow C \cap D = \{3\};$

$E = \{x \mid x < 5\},\ F = \{x \mid x \geq 1\},\ E \cap F = \{x \mid 1 \leq x < 5\}$, kai x yra realusis skaičius.



Dviejų aibių sąjunga

Aibė visų objektų, kurių kiekvienas priklauso bent vienai iš aibių A arba B, vadinama aibių A ir B sąjunga. Žymima $A \cup B$ (skaitoma: A ir B sąjunga).

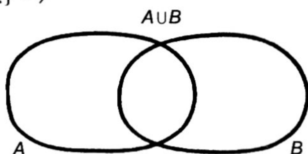
$$A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Pavyzdžiai

$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e, f\} \rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\boldsymbol{Z}^- = \{-1, -2, -3, ...\} \rightarrow$

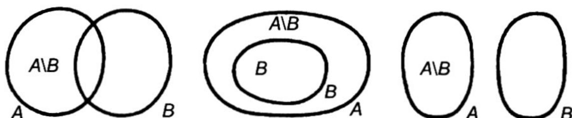
$\rightarrow \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z}^- = \{... -2, -1, 1, 2, ...\}$.



Aibių skirtumas arba liekamoji aibė

Visų objektų, priklausančių A, bet kartu nepriklausančių B, aibė vadinama aibių A ir B skirtumu arba liekamąja aibe. Žymima $A \setminus B$ (skaitoma: A ir B skirtumas).

$$x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$



Pavyzdžiai:
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \to A \setminus B = \{1, 9\}$ arba $B \setminus A = \{2, 11, 13\}$;
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, d, f\} \to A \setminus B = \{a, c, e\}$, $B \setminus A = \varnothing$;
$A = \{n^2 \mid n \in N\}$, $B = N$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, ...\}$.

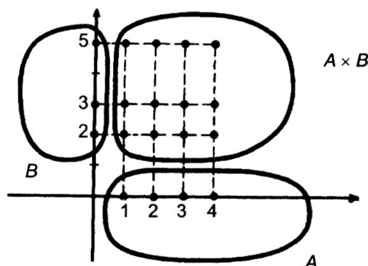
Aibių sandauga

Aibių A ir B sandauga vadinama aibė visų sutvarkytųjų porų, sudarytų iš aibės A (pirmoje vietoje) ir aibės B (antroje vietoje) elementų. Žymima $A \times B$ (skaitoma: A ir B sandauga, A kart B).

$$(x; y) \in A \times B \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B.$$

Pavyzdžiai
$A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\} \to$
$\to A \times B = \{(a; x), (a; y), (b; x), (b; y), (c; x), (c; y)\}$;
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\} \to$
$\to A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (1; 5), (2; 2), (2; 3), ..., (4; 5)\}$.

Atidėję aibės A elementus kaip taškus horizontaliajame skaičių spindulyje, o aibės B elementus – jam statmename skaičių spindulyje, aibės $A \times B$ elementus pavaizduotume plokštumos taškais.



Panašiai samprotaudami toliau gautume, kad visus koordinačių plokštumos xOy taškus, kai $x \in \boldsymbol{R}$ ir $y \in \boldsymbol{R}$, galima laikyti aibės $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ elementų vaizdais.

Atskirieji atvejai

Įsidėmėkite šiuos specialiuosius aibių sąryšius:

$$A \cup A = A; \quad A \setminus A = \varnothing; \quad \varnothing \setminus A = \varnothing; \quad A \cup \varnothing = A;$$
$$A \cap A = A; \quad A \setminus \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Skliaustų taisyklės

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

1.3. Teiginio funkcijos

Teiginio funkcijos apibrėžimas

Tarkime, kad sąlygoje nurodyta aibė G, vadinama pagrindine aibe, ir bet koks jos elementas x, vadinamas aibės G kintamuoju.

Kintamojo x teiginio funkcija, apibrėžta aibėje G, vadinamas sakinys $A(x)$, iš kurio gaunamas teiginys, įrašius vietoj x tam tikrą reikšmę.

Visų x, su kuriais iš teiginio funkcijos gaunamas teisingas teiginys, aibė L vadinama teiginio funkcijos sprendinių aibe. Sprendinių aibė yra aibės G poaibis.

Pavyzdžiai. Tarkime, kad pagrindinė aibė G yra visų dangaus kūnų aibė. Teiginio funkcija $A(x)$: „x yra Saulės sistemos planeta" turi sprendinių aibę {Merkurijus, Venera, Žemė, Marsas, Saturnas, Jupiteris, Uranas, Neptūnas, Plutonas}, nes įrašę vietoj x, pavyzdžiui, Jupiterį, gauname teisingą teiginį A(Jupiteris): „Jupiteris yra planeta". Tačiau, įrašę vietoj x Saulę, gauname klaidingą teiginį A(Saulė): „Saulė yra planeta".

Pagrindinė aibė $G = \boldsymbol{N}$, $A(x)$: „Vienetu padidintas padvigubintas dydis x lygus 7". $A(3)$: „Vienetu padidintas padvigubintas skaičius 3 lygus 7" yra teisingas teiginys, įrašius vietoj x kitą reikšmę, gaunamas klaidingas teiginys. Todėl sprendinių aibė yra $\{3\}$.

Pagrindinė aibė $G = \boldsymbol{Z}$, $A(x)$: „Dviem vienetais sumažintas patrigubintas dydis x yra didesnis už –8 ir mažesnis už 1". $A(x)$ galima užrašyti formule: „$-8 < 3x - 2 < 1$". Sprendinių aibė yra $\{-1, 0\}$.

Yra teiginio funkcijų, kurių sprendinių aibė yra tuščioji, ir tokių, kurių sprendinių aibė sutampa su pagrindine aibe.

Pavyzdžiai. $G = \boldsymbol{R}$, $A(x)$: „Padidintas 5 vienetais x kvadratas lygus nuliui", sprendinių aibė $\varnothing$, nes nėra realiojo skaičiaus, tinkančio lygčiai $x^2 + 5 = 0$.
$G = \boldsymbol{N}$, $A(x)$: „Dydžio x kvadratas yra didesnis arba lygus x".
Sprendinių aibė yra $\boldsymbol{N}$, kadangi ši savybė būdinga visiems natūraliesiems skaičiams.

Teiginio funkcijos sąryšiai

Iš kiekvienos teiginio funkcijos galima gauti baigtinę arba begalinę teiginių aibę. Teiginio funkcijas, kaip ir teiginius, galima susieti vieną su kita sąryšiais. Pagrindiniai sąryšiai yra šie: implikacija (atitinka teiginių implikaciją), ekvivalentumas (atitinka teiginių ekvivalentumą), konjunkcija ir disjunkcija. Formaliai prie sąryšių galima priskirti ir neigimą.

Tarkime, kad $A_1(x)$ ir $A_2(x)$ yra dvi teiginio funkcijos. Jas galima susieti tokiais sąryšiais:

implikacija: $A_1(x) \Rightarrow A_2(x)$;

ekvivalentumu: $A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)$;

konjunkcija: $A_1(x) \wedge A_2(x)$;

disjunkcija: $A_1(x) \vee A_2(x)$;

neigimu: $\overline{A_1(x)}$ atitinkamai $\overline{A_2(x)}$.

Pavyzdžiai. $G = \mathbf{Q}$, $A_1(x)$: „Skaičiaus x, padidinto 1, pusė lygi 2“.
$A_2(x)$: „Skaičius x, padidintas 1, lygus 4“.

$A_1(x)$: $\frac{x+1}{2} = 2$, $A_2(x): x+1=4$.

$A_1(x) \Rightarrow A_2(x)$: „Jeigu skaičiaus x, padidinto 1, pusė lygi 2, tai skaičius x, padidintas 1, lygus 4“,

$\frac{x+1}{2} = 2 \Rightarrow x+1=4$.

$A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)$: „Vienetu padidinto skaičiaus x pusė yra skaičius 2, nes vienetu padidintas skaičius x lygus 4“.

$G = \mathbf{Q}$, $A_1(x)$: „Skaičius x yra didesnis už –2“, $x > -2$.
$A_2(x)$: „Skaičius x yra didesnis už 3“, $x > 3$.

$A_1(x) \wedge A_2(x)$: „Skaičius x yra didesnis už –2 ir didesnis už 3“.
$x > -2 \wedge x > 3$.

$A_1(x) \vee A_2(x)$: „Skaičius x yra arba didesnis už –2, arba didesnis už 3“.
$x > -2 \vee x > 3$.

Dvi teiginio funkcijos, apibrėžtos pagrindinėje aibėje G, yra ekvivalenčios, jeigu teiginio funkcija $A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)$ turi sprendinių aibę $L = G$.

Pavyzdžiai: $G = \boldsymbol{Q}$, $A_1(x)$: $4x - 5 = 3$, $A_2(x)$: $4x = 8$.
$A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)$: $4x - 5 = 3 \Leftrightarrow 4x = 8$.
Antroji lygtis gaunama iš pirmosios, pridėjus prie abiejų jos pusių 5.
Teiginio funkcija $A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)$ yra teisinga su visais $x \in \boldsymbol{Q}$, todėl $L = \boldsymbol{Q} = G$.

Reiškiniai (termai)

Matematikoje vartojamos teiginio funkcijos beveik visada užrašomos reiškiniu, kuriame skaičiai ir kintamieji susieti skaičiavimo operacijų simboliais. Šnekamojoje kalboje žodis „reiškinys" vartojamas keliomis prasmėmis, todėl matematikoje vietoj žodžio „reiškinys" vartojamas dar ir žodis „termas"*. Yra daug skirtingų rūšių reiškinių. Paprasčiausi yra racionalieji reiškiniai.

Racionaliuoju reiškiniu $R(x)$ vadinamas bet koks prasmingas realiųjų skaičių bei kintamųjų x sąryšis, gautas panaudojant simbolius „+", „–", „·", „:" ir trupmenos ženklą. Patys realieji skaičiai bei kintamieji x irgi priskiriami racionaliesiems reiškiniams.

Pavyzdžiai. Skaitiniai reiškiniai: $-\frac{1}{2}$, 0, 13, $\frac{7\sqrt{5}}{8}$.
Kintamojo x reiškiniai: x, x^2, x^3.
Skaitiniai ir kintamojo x reiškiniai: $2x+1$, $\frac{x+3}{x-1}$, $\frac{1}{2}x^3$.

Reiškinio $R(x)$ apibrėžimo sritis D yra visų kintamųjų x, su kuriais $R(x)$ yra realusis skaičius, aibė.

Pavyzdžiai. $T_1(x) = \frac{x+2}{3}$, $D = \boldsymbol{R}$;

$T_2(x) = \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x+2)}$, $D = \boldsymbol{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$T_3(x) = \frac{x-3}{x-3}$, $D = \boldsymbol{R} \setminus \{3\}$.

* Tai ypač būdinga matematinei literatūrai vokiečių kalba, bet nebūdinga literatūrai lietuvių kalba (*vertėjo pastaba*).

2. Aritmetika

2.1. Natūralieji skaičiai

Natūralieji skaičiai

Skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, ... vadinami natūraliaisiais skaičiais. Jie naudojami skaičiuojant daiktų kiekį.

Natūraliųjų skaičių aibė: $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Pirminiai skaičiai

Visi natūralieji skaičiai, kurie turi tik du daliklius, vadinami pirminiais skaičiais. Likusieji skaičiai vadinami sudėtiniais skaičiais. Skaičius 1 nėra nei pirminis, nei sudėtinis.

Sudėtinius skaičius galima išskaidyti pirminių skaičių (pirminių daugiklių) sandauga.

Pavyzdžiai. 1 nėra pirminis skaičius;

2 yra pirminis skaičius, priešingai nei skaičiai 4, 6, 8, ...;

3 yra pirminis skaičius, priešingai nei skaičiai 9, 15, 21, ...;

5 yra pirminis skaičius, priešingai nei skaičiai 25, 35, ...

Kiti pirminiai skaičiai yra šie: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Skaičių 72 galima taip išskaidyti pirminiais daugikliais:

$72 = 2 \cdot 36;$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 18;$

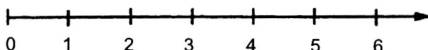
$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9;$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3.$

Žinomi ne visi pirminių skaičių aibės P elementai, $P \subset N$.

Natūraliųjų skaičių sutvarkymas

Visus natūraliuosius skaičius galima pavaizduoti skaičių tiesės taškais. Taip sutvarkomi natūralieji skaičiai.



Galioja: 1 < 2, 2 < 3, 3 < 4, 4 < 5, ...

Natūraliųjų skaičių sekos

Natūralieji skaičiai, surašyti vienas po kito ir atskirti kableliu, sudaro skaičių seką. Skaičiai vadinami tos sekos nariais.

Seka gali turėti baigtinį arba begalinį narių skaičių. Kiekvienas sekos narys (išskyrus pirmąjį) turi prieš jį einantį narį ir kiekvienas sekos narys (išskyrus paskutinį) turi paskesnį narį. Sekos apibūdinamos nurodant sudarymo taisyklę.

Pavyzdžiai. Seka pradedama skaičiumi 4. Kiekvienas sekos narys yra vienetu didesnis už padvigubintą prieš jį esantį narį. Gaunama tokia seka: 4, 9, 19, 39, 79, ...

Seka pradedama skaičiumi 5. Kiekvienas sekos narys lygus trigubam prieš jį einančiam nariui, sumažintam dviem vienetais. Gaunama tokia seka: 5, 13, 37, 109, 325, ...

2.2. Veiksmai su natūraliaisiais skaičiais

Sudėtis ir atimtis

31 + 49 = 80.

31 + 49 vadinamas suma, 31 yra pirmasis dėmuo, 49 – antrasis dėmuo, 80 – sumos reikšmė.

$$116 - 44 = 72.$$

116 – 44 vadinamas skirtumu, 116 yra turinys, 44 – atėminys, 72 – skirtumo reikšmė.

Pavyzdžiai. Prie didžiausio keturženklio skaičiaus pridėtas mažiausias triženklis skaičius: 9999 + 100 = 10 099.

Iš 1354 atimtas didžiausias triženklis skaičius: 1354 – 999 = 355.

Kaip pakinta skirtumo reikšmė turinį padidinus 5 vienetais?

Nagrinėkime skirtumą 100 – 40 = 60. Turinys yra 100, padidintas 5 vienetais jis lygus 105. Tada skirtumas lygus 105 – 40 = 65. Skirtumo reikšmė padidėjo 5 vienetais.

Daugyba

$$36 \cdot 19 = 684.$$

$36 \cdot 19$ vadinama sandauga, 36 yra pirmasis daugiklis, 19 – antrasis daugiklis, 684 – sandaugos reikšmė.

Kai vienas daugiklis yra skaičius 1, sandaugos reikšmė lygi antrajam daugikliui. Kai vienas daugiklis yra skaičius 0, sandaugos reikšmė lygi 0.

Kai sandaugą sudaro daugiau daugiklių, pirmiausia sudauginami du daugikliai, po to gautas rezultatas padauginamas iš trečiojo daugiklio ir t. t.

Jeigu vienas daugiklis yra dešimtainės sistemos pagrindo laipsnis, prie kito daugiklio prirašoma tiek nulių, kiek jų yra šiame laipsnyje. Tai ir bus sandaugos reikšmė.

Pavyzdžiai: $2365 \cdot 1 = 2365$;

$34\,409 \cdot 0 = 0$;

$456 \cdot 0 \cdot 370 \cdot 245 = 0$;

$156 \cdot 100 = 15\,600$;

$23 \cdot 1000 \cdot 5 = 23 \cdot 5 \cdot 1000 = 115 \cdot 1000 = 115000$;

$37 \cdot 14 \cdot 56 \cdot 7 = (37 \cdot 14) \cdot 56 \cdot 7 = (518 \cdot 56) \cdot 7 =$

$= 29008 \cdot 7 = 203056.$

Laipsniai

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243.$$

Padauginus skaičių 3 penkis kartus patį iš savęs, gaunamas laipsnis 3^5. Skaičius 3 yra pagrindas, 5 – laipsnio rodiklis, 243 – laipsnio reikšmė.

Pavyzdžiai: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$;
$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$;
$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^7 = 823\,543$.

Dalyba

$$800 : 25 = 32.$$

800 : 25 vadinama dalmeniu, 800 yra dalinys, 25 – daliklis, 32 – dalmens reikšmė.

Dalyti iš 0 negalima. Kai dalinys lygus 0, o daliklis nelygus 0, dalmens reikšmė yra 0.

Dalyba gali būti be liekanos arba su liekana.

Jeigu dalinys arba daliklis gale turi nulių, galima iš jų abiejų pašalinti vienodą nulių kiekį.

Pavyzdžiai: 255 : 0 yra negalimas veiksmas;
0 : 482 = 0;
330 : 22 = 15, dalyba be liekanos;
334 : 22 = 15, liekana lygi 4;
5500 : 100 = 55, iš dalinio ir daliklio pašalinta po du nulius;
55 000 : 1100 = 550 : 11 = 50, iš dalinio ir daliklio iš pradžių pašalinta po du nulius, po to padalyta.

2.3. Sudėtingi skaitiniai reiškiniai

Skaičiuojant sudėtingų skaitinių reiškinių, sudarytų naudojant įvairius veiksmų simbolius, reikšmes, pirmiausia atliekami veiksmai

skliaustuose. Po to atliekami daugybos ir dalybos veiksmai ir galiausiai sudėties bei atimties veiksmai.

Skliaustai prieš ·, : ir prieš + , −

Pavyzdžiai. (24 − 19) · 5 + (16 + 38) : 9 − (29 − 21) : 8 =
apskaičiuojame skliaustuose: 5 · 5 + 54 : 9 − 8 : 8 =
sudauginame ir padalijame: 25 + 6 − 1 =
sudedame ir atimame: 31 − 1 = 30.

Skaičių 366 ir 279 skirtumą padauginkime iš skaičių 764 ir 733 skirtumo.
Užrašas: (366 − 279) · (764 − 733) =
apskaičiuojame skliaustuose: 87 · 31 =
sudauginame: 2697.

Kelionės pradžioje buvo užfiksuota automobilio rida 23 678 km. Pirmąją kelionės dieną nuvažiuota 468 km, antrąją – dvigubai tiek, trečiąją – trečdalis to, kiek nuvažiuota antrąją dieną. Kokia automobilio rida užfiksuota po trijų kelionės dienų?

Užrašas:
23 678 km + (468 km + 468 · 2 km + 468 · 2 : 3 km).
Sudauginame ir padalijame skliaustuose:
= 23 678 km + (468 km + 936 km + 312 km),
sudedame skliaustuose: = 23 678 km + 1716 km,
sudedame: = 25 394 km.
Automobilio rida po trijų kelionės dienų yra 25 394 km.

2.4. Daliklis

Jeigu natūralusis skaičius a dalijasi be liekanos iš natūraliojo skaičiaus b, tai a vadinamas skaičiaus b kartotiniu, o b – skaičiaus a dalikliu.

Tai, kad „a yra dalus iš b“, žymima $b \mid a$.

Kiekvieno skaičiaus daliklis yra jis pats. 1 yra bet kurio skaičiaus daliklis.

Pavyzdys. Raskime visus skaičiaus 330 daliklius.
1 ir 330 yra skaičiaus 330 dalikliai.
15 ir 22 yra skaičiaus 330 dalikliai (radome pabandydami).
3 ir 5 yra 15 dalikliai, taigi ir 330.
2 ir 11 yra 22 dalikliai, taigi ir 330.
Kiti dalikliai yra tokie: 165, 110, 66, 55, 33, 30, 10 ir 6.
Visi dalikliai sudaro daliklių aibę D_{330}:
$D_{330} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330\}$.

Sudėtingą daliklių paiešką palengvina dalumo požymiai.

Dalumo požymiai

Pagal paskutiniuosius skaitmenis

Skaičius dalijasi:
iš 5, kai jis baigiasi 0 arba 5;
iš 2, kai jis baigiasi lyginiu skaičiumi arba 0;
iš 4, kai skaičius, sudarytas iš paskutiniųjų dviejų skaitmenų, dalijasi iš 4;
iš 8, kai skaičius, sudarytas iš paskutiniųjų trijų skaitmenų, dalijasi iš 8;
iš 25, kai skaičius baigiasi skaitmenimis 00, 25, 50 arba 75.

Pagal skaitmenų sumą

Skaičius dalijasi:
iš 3, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3;
iš 9, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9.

Pavyzdžiai. Skaičiaus 13 671 skaitmenų suma lygi
$1 + 3 + 6 + 7 + 1 = 18$.
18 dalijasi iš 9, taigi ir skaičius 13 671 dalijasi iš 9.
Skaičius 8640 dalijasi iš 2 ir 5, nes jis baigiasi 0.
Šis skaičius dalijasi ir iš 8, kadangi iš paskutinių trijų skaitmenų sudarytas skaičius 640 dalijasi iš 8. Jis dalijasi ir iš 4.
Kadangi nurodytas skaičius dalijasi iš 9, jis dalijasi ir iš 3.

Bendrasis daliklis

> Skaičius, kuris yra ir skaičiaus *a*, ir skaičiaus *b* daliklis, vadinamas bendruoju skaičių *a* ir *b* dalikliu (BD). Kai skaičiai *a* ir *b* turi vienintelį bendrąjį daliklį, lygų 1, tai skaičiai *a* ir *b* vadinami tarpusavyje pirminiais.

Tarp bendrųjų dviejų skaičių daliklių yra didžiausias bendrasis daliklis (DBD).

Pavyzdžiai. Skaičiai 50 ir 63 yra tarpusavyje pirminiai, nes jie teturi vieną bendrąjį daliklį 1:
$D_{50} = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$, $D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$.

Skaičiaus 7389 skaitmenų suma lygi 27, todėl jis dalijasi iš 9. Skaičiaus 13 041 skaitmenų suma lygi 9, todėl jis irgi dalijasi iš 9.

Taigi skaičiai 7389 ir 13041 nėra tarpusavyje pirminiai.
Skaičiaus 36 daliklių aibė yra tokia: $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.
Skaičiaus 56 daliklių aibė yra ši: $D_{56} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$.
Bendrųjų daliklių aibė tokia: $D_{36} \cap D_{56} = \{1, 2, 4\}$.
Didžiausias bendrasis daliklis (DBD) (36, 54) = 4.

Dviejų skaičių *a* ir *b* DBD yra skaičių *a* ir *b* BD.

Pavyzdys. DBD (48, 72) = 24.
Skaičiaus 24 dalikliai yra šie: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.
Jie yra ir skaičių 48 bei 72 BD.

2.5. Bendrasis kartotinis

> Skaičiaus *a* kartotinių aibės K_a ir skaičiaus *b* kartotinių aibės K_b sankirta $K_a \cap K_b$ yra skaičių *a* ir *b* bendrųjų kartotinių aibė. Aibėje $K_a \cap K_b$ yra mažiausias bendrasis kartotinis (MBK).

Pavyzdys. Skaičių 6 ir 8 kartotinių aibės yra tokios:
K_6 = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ...},
K_8 = {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, ...}.
Bendrųjų kartotinių aibė yra
$K_6 \cap K_8$ = {24, 48, 72, ...}, mažiausias bendrasis kartotinis yra 24, taigi MBK (6, 8) = 24.

MBK galima gauti išskaidžius skaičius pirminiais daugikliais.

> Skaičių skaidant pirminiais daugikliais, vienodų daugiklių sandauga užrašoma laipsniu. Po to visi skirtingi aukščiausiu laipsniu pakelti pirminiai daugikliai sudauginami vienas su kitu.

Pavyzdys. Raskime MBK (840, 900):
$840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$,
$900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$,
MBK (840, 900) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12\,600$.

2.6. Sveikieji skaičiai

Skaičius ir priešingasis skaičius

Papildę natūraliųjų skaičių aibę tokiais pačiais skaičiais, tik su ženklu „–“, bei nuliu, gauname sveikuosius skaičius.

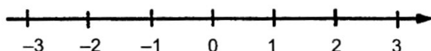
Sveikųjų skaičių aibė: **Z** = {... –2, –1, 0, 1, 2, ...}.

–2 ir 2, –1 ir 1 ir t. t. vadinami priešingaisiais skaičiais.

Natūraliuosius skaičius galima traktuoti kaip neneigiamuosius sveikuosius skaičius ($N = Z^+$). Sveikasis skaičius 0 neturi priešingojo skaičiaus. Neigiamųjų sveikųjų skaičių aibę žymime simboliu Z^-. Taigi $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$.

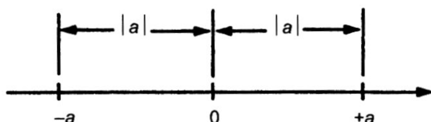
Sveikuosius skaičius galima pavaizduoti skaičių tiesės taškais. Kiekvienas skaičius, kurio vaizdas yra į dešinę nuo nulinio taško, turi veidrodinį vaizdą į kairę nuo nulinio taško. Sveikųjų skaičių aibė yra sutvarkyta: iš dviejų sveikųjų skaičių mažesnis tas, kurio vaizdas skaičių tiesėje yra kairiau.

Sveikieji skaičiai skaičių tiesėje:



Skaičiaus modulis

Priešingieji skaičiai skaičių tiesėje vaizduojami taškais, esančiais skirtingose pusėse nuo nulinio taško ir vienodai nutolusiais nuo jo. Skaičiaus a (arba priešingojo skaičiaus $-a$) vaizdo atstumas iki nulinio taško vadinamas skaičiaus a moduliu ir žymimas $|a|$.



$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Kai $a < 0$, tai $-a$ yra teigiamasis skaičius.

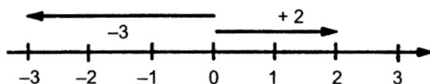
Pavyzdžiai: $|+4| = 4$; $|-4| = 4$; $|0| = 0$;

$$|45 + |-36| - 40 - |-22|| = |45 + 36 - 40 - 22| = 19.$$

Skaičių rodyklės

Sveikuosius skaičius galima vaizduoti rodyklėmis virš skaičių tiesės. Rodyklės, vaizduojančios teigiamuosius skaičius, yra nukreiptos į dešinę, o tos, kuriomis vaizduojami neigiamieji skaičiai, nukreiptos į kairę.

Pavyzdys:



Rodykles galima perstumti jų kryptimi išilgai jų ilgio. Pakeitus rodyklės kryptį, gaunamas priešingo ženklo skaičiaus vaizdas.

2.7. Veiksmai su sveikaisiais skaičiais

Sudėtis

Sudedant du sveikuosius skaičius reikia skirti šiuos atvejus:

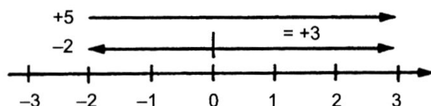
$$(+5) + (+3) = 5 + 3 = 8;$$
$$(+5) + (-3) = 5 - 3 = 2;$$
$$(-5) + (+3) = -5 + 3 = -2;$$
$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8.$$

Ženklai + ir – turi dvi skirtingas prasmes. Pirma, jie yra skaičių ženklai, antra, jie yra veiksmų ženklai. Norint, kad skaičių ir veiksmų ženklai nebūtų surašyti tiesiogiai vienas po kito, skaičiai su jų ženklais pirmiausia parašomi skliaustuose. Skaičiaus, kuris yra reiškinio pradžioje, skliaustai praleidžiami. Skaičiuojant toliau taikomos taisyklės:

$$+(+a) = +a \quad \text{ir} \quad +(-a) = -a.$$

Pavyzdys: $+23+(-15)+(-2)+(+5)=+23-15-2+5=11.$

Šias dvi taisykles galima pagrįsti rodyklių sudėtimi, kuri apibrėžiama taip: „Antrojo skaičiaus rodyklės pradžia patalpinama ties pirmojo skaičiaus rodyklės galu“. Rodyklės, kuria išreiškiama suma, pradžia atitinka pirmosios rodyklės pradžią, o galas – antrosios rodyklės galą.
Pavyzdys: $(-2) + 5 = (+3)$.



Atimtis

Atimant sveikuosius skaičius reikia skirti šiuos atvejus:

$$(+5) - (+3) = 5 - 3 = 2;$$
$$(+5) - (-3) = 5 + 3 = 8;$$
$$(-5) - (+3) = -5 - 3 = -8;$$
$$(-5) - (-3) = -5 + 3 = -2.$$

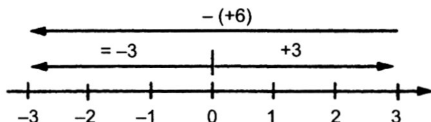
Ženklai + ir – turi dvi skirtingas prasmes. Pirma, jie yra skaičių ženklai, antra, jie yra veiksmų ženklai. Norint, kad skaičių ir veiksmų ženklai nebūtų surašyti tiesiogiai vienas po kito, skaičiai su jų ženklais pirmiausia parašomi skliaustuose. Skaičiaus, kuris yra reiškinio pradžioje, skliaustai praleidžiami. Toliau taikomos tokios taisyklės:

$$-(+a) = -a \quad \text{ir} \quad -(-a) = +a.$$

Pavyzdys: $-34-(-42)-(+25)+84=-34+42-25+84=67.$

Šias taisykles galima pagrįsti rodiklių atimtimi, jei ji apibrėžiama taip: „Ties turinio rodyklės galu patalpinama skaičiaus, priešingo atėminiui, rodyklės pradžia.“

Pavyzdys: $(+3)-(+6)=3-6=-3.$



Daugyba

Dauginant sveikuosius skaičius reikia skirti šiuos atvejus:

$$(+5)\cdot(+3) = +15 = 15;$$
$$(+5)\cdot(-3) = -15;$$
$$(-5)\cdot(+3) = -15;$$
$$(-5)\cdot(-3) = +15 = 15.$$

Norint, kad skaičių ir veiksmų ženklai nebūtų surašyti tiesiogiai vienas po kito, skaičiai su jų ženklais pirmiausia parašomi skliaustuose. Toliau remiamasi tokia taisykle:

dviejų sveikųjų priešingų ženklų skaičių sandauga lygi jų modulių sandaugai, prieš kurią parašytas minuso ženklas. Dviejų sveikųjų vienodų ženklų skaičių sandauga lygi jų modulių sandaugai.

Atskirieji atvejai. Su visais sveikaisiais skaičiais *a* ir *b* visada teisingos lygybės:

$1 \cdot a = a$; $(-1) \cdot a = -a$;

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

$a \cdot b = 0$, kai $a = 0$ arba $b = 0$.

Pavyzdžiai: $(-4) \cdot (+6) = -24$;

$(-7) \cdot (-9) = 63$;

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (+1) \cdot (-1) = +1$;

$(-2)^5 = -2^5 = -32$.

Dalyba

Dalijant sveikuosius skaičius reikia skirti šiuos atvejus:

$(+15) : (+3) = +5$;
$(+15) : (-3) = -5$;
$(-15) : (+3) = -5$;
$(-15) : (-3) = +5$.

Norint, kad skaičių ir veiksmų ženklai nebūtų surašyti tiesiogiai vienas po kito, skaičiai su jų ženklais pirmiausia parašomi skliaustuose. Toliau remiamasi tokia taisykle:

dviejų sveikųjų priešingų ženklų skaičių dalmuo yra lygus jų modulių dalmeniui su prirašytu prieš jį minuso ženklu. Dviejų sveikųjų vienodų ženklų skaičių dalmuo lygus jų modulių dalmeniui.

Atskirieji atvejai. Su visais sveikaisiais skaičiais $a \neq 0$ visada teisingos lygybės:

$a : 1 = a$; $a : (-1) = -a$;

$0 : a = 0$;

$a : 0$ neturi prasmės.

Pavyzdžiai: $(+8) : (-2) = -4$;

$(-42) : (-2) = +21$;

$0 : (-100) = 0$;

$(-50) : (+5) = -10$;

$(-10\,000) : (-100) = +100$;

$(+17) : (+5) = 3$ ir liekana 2.

2.8. Racionalieji skaičiai

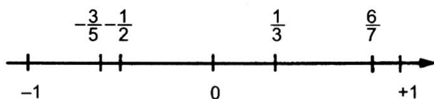
Apibrėžimas

Sveikųjų skaičių aibėje dalyba galima ne visada. Papildę sveikųjų skaičių aibę trupmenomis, kurių skaitiklis yra sveikasis skaičius, gauname aibę, kurioje dalyba (išskyrus dalybą iš 0) jau visada galima. Kadangi kiekvieną sveikąjį skaičių irgi galima parašyti trupmena (kurios vardiklis 1), tai išplėstąją skaičių aibę* galima užrašyti taip.

Racionaliųjų skaičių aibė: $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in Z \; \wedge \; n \in Z \setminus \{0\} \right\}$.

Reiškiniai $\frac{m}{n}$ vadinami trupmenomis, m – skaitikliu, n – vardikliu, dalmens reikšmė vadinama trupmenos reikšme arba trupmeniniu skaičiumi. Trupmeninius skaičius taip pat galima pavaizduoti skaičių tiesės taškais.

Pavyzdys



Trupmenos, kurių skaitiklis 1, vadinamos pagrindinėmis $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$.

Trupmenos, kurių skaitiklis yra mažesnis už vardiklį, vadinamos taisyklingosiomis $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \ldots\right)$.

Trupmenos, kurių skaitiklis yra didesnis už vardiklį, vadinamos netaisyklingosiomis $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots\right)$.

Trupmenos, kurių skaitiklis ir vardiklis lygūs, yra trupmeninis skaičius 1.

Trupmenos, kurių reikšmė yra sveikasis skaičius, vadinamos menamosiomis $\left(\frac{10}{2} = 5\right)$.

Pagrindinė trupmenos savybė

Trupmenos reikšmė nesikeičia, kai jos skaitiklis ir vardiklis padauginami iš to paties (nelygaus 0) skaičiaus.

* Ji vadinama racionaliųjų skaičių aibe (*vertėjo pastaba*).

Pavyzdžiai. $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{18}{24}$; $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot(-8)}{5\cdot(-8)}=\frac{-16}{-40}$.

$\frac{4}{5}$ parašykime trupmena, kurios vardiklis 195.

Kadangi 195 : 5 = 39, tai $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 39}{5\cdot 39}=\frac{156}{195}$.

Prastinimas

Trupmenos reikšmė nesikeičia, kai jos skaitiklis ir vardiklis padalijamas iš to paties skaičiaus. Toks pertvarkis vadinamas trupmenos prastinimu.

Pavyzdžiai. $\frac{70}{84}=\frac{70:7}{84:7}=\frac{10}{12}$; $\frac{10}{12}=\frac{10:2}{12:2}=\frac{5}{6}$.

Norėdami suprastinti trupmeną $\frac{168}{360}$, pirmiausia jos skaitiklį ir vardiklį išskaidome pirminiais daugikliais, po to skaitiklyje ir vardiklyje išbraukiame vienodus pirminius daugiklius:

$$\frac{168}{360}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}=\frac{7}{3\cdot 5}=\frac{7}{15}.$$

Kito pateikto reiškinio visi daugikliai taip pat išskaidomi pirminiais daugikliais ir išbraukiami vienodi pirminiai daugikliai:

$$\frac{25\cdot 24\cdot 28}{72\cdot 35\cdot 12}=\frac{5\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{5}{9}.$$

Toliau pateiktame pavyzdyje, laikantis veiksmų pirmumo taisyklės, atliekami veiksmai skaitiklyje ir vardiklyje, po to išskaidoma pirminiais daugikliais:

$$\frac{60\cdot 4+2\cdot 4}{24\cdot 6+4}=\frac{240+8}{144+4}=\frac{248}{148}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 31}{2\cdot 2\cdot 37}=\frac{62}{37}.$$

Tolimesniame pavyzdyje pirmiausia skaitiklyje ir vardiklyje nubraukiami du nuliai (padalijama iš 100), po to išskaidoma pirminiais daugikliais:

$$\frac{7200}{12\,400}=\frac{72}{124}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 31}=\frac{18}{31}.$$

Trupmenų palyginimas

Trupmenos su lygiais vardikliais lyginamos pagal jų skaitiklius. Trupmenos, kurių vardikliai skirtingi, prieš palyginant subendravardiklinamos.

Pavyzdžiai: $\frac{3}{9}<\frac{7}{9}$, nes $3 < 7$;

$\frac{3}{7}>\frac{11}{28}$, nes $\frac{12}{28}>\frac{11}{28}$ arba $12 > 11$;

$-\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$, kadangi $-\frac{8}{12}>-\frac{9}{12}$ arba $-8 > -9$.

2.9. Veiksmai su racionaliaisiais skaičiais

Sudėtis ir atimtis

Ženklų taisyklės, suformuluotos sveikiesiems skaičiams, tinka ir racionaliesiems skaičiams.

> Trupmenos, kurių vardikliai lygūs, sudedamos (atimamos) sudedant (atimant) jų skaitiklius ir paliekant tą patį vardiklį. Trupmenos, kurių vardikliai nelygūs, prieš jas sudedant ar atimant subendravardiklinamos. Mažiausias bendrasis vardiklių kartotinis vadinamas mažiausiu bendruoju vardikliu.

Pavyzdžiai. $\frac{50}{56}-\frac{36}{56}+\frac{18}{56}-\frac{31}{56}=\frac{50-36+18-31}{56}=\frac{1}{56}$;

$\frac{104}{3}-4=\frac{104}{3}-\frac{12}{3}=\frac{100-12}{3}=\frac{92}{3}$.

Pateikto reiškinio vardikliai 7 ir 8 yra tarpusavyje pirminiai, todėl mažiausias bendrasis vardiklis lygus $7\cdot 8=56$:

$\frac{2}{7}+\frac{3}{8}=\frac{16}{56}+\frac{21}{56}=\frac{37}{56}$.

Toliau pateiktame pavyzdyje vardikliai turi bendrųjų daliklių. Nesunku įsitikinti, kad jų mažiausias bendrasis kartotinis lygus 36:

$\frac{7}{12}-\frac{5}{18}=\frac{21}{36}-\frac{10}{36}=\frac{21-10}{36}=\frac{11}{36}$.

Apskaičiuodami tolimesnio reiškinio reikšmę, mažiausią bendrąjį vardiklį randame išskaidydami kiekvieną vardiklį pirminiais daugikliais:

$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7;$

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7;$

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5;$

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7;$

$\text{MBK} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 630;$

$$\frac{138}{63} + \frac{29}{42} + \frac{39}{45} - \frac{787}{210} = \frac{138 \cdot 10}{630} + \frac{29 \cdot 15}{630} + \frac{39 \cdot 14}{630} - \frac{787 \cdot 3}{630} =$$

$$= \frac{1380 + 435 + 546 - 2361}{630} = \frac{0}{630} = 0.$$

Daugyba

Dauginant trupmeną iš skaičiaus, iš to skaičiaus padauginamas jos skaitiklis, o vardiklis paliekamas tas pats. Dauginant dvi trupmenas, sudauginami jų skaitikliai vienas su kitu ir vardikliai vienas su kitu. Skaitiklių sandauga įrašoma skaitiklyje, o vardiklių sandauga – vardiklyje.

Pavyzdžiai: $\frac{11}{15} \cdot 3 = \frac{11 \cdot 3}{15} = \frac{33}{15};$

$\frac{5}{8} \cdot 56 = \frac{5 \cdot 56}{8} = \frac{5 \cdot 7}{1} = 35;$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}.$

Dalyba

Sukeitus trupmenos skaitiklį ir vardiklį vietomis, gaunama atvirkštinė trupmena. Skaičius padalijamas iš trupmenos, padauginant jį iš atvirkštinės trupmenos. Trupmena padalijama iš trupmenos, padauginant dalinį iš trupmenos, atvirkštinės dalikliui.

Pavyzdžiai: $\frac{2}{3}$ yra atvirkštinė trupmenai $\frac{3}{2};$

$15 : \frac{3}{5} = 15 \cdot \frac{5}{3} = \frac{15 \cdot 5}{3} = \frac{75}{3};$

$\frac{9}{5} : 5 = \frac{9}{5} : \frac{5}{1} = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{25};$

$$\frac{5}{8}:\frac{3}{4}=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 3}=\frac{5}{6}.$$

Mišrieji skaičiai

Netaisyklingąją trupmeną galima išreikšti sveikojo skaičiaus ir trupmenos suma: $\frac{18}{5}=\frac{15}{5}+\frac{3}{5}=3+\frac{3}{5}$. Ši suma dažniausiai parašoma mišriuoju skaičiumi $3\frac{3}{5}$ (pliuso ženklas praleidžiamas). Atvirkščiai, norint mišrųjį skaičių išreikšti netaisyklingąja trupmena, įrašomas pliuso ženklas ir sudedama:

$$5\frac{7}{8}=5+\frac{7}{8}=\frac{40}{8}+\frac{7}{8}=\frac{47}{8}.$$

2.10. Dešimtainės trupmenos

Baigtinės dešimtainės trupmenos

Skaičiai 1,5; 17,34; 0,245; 5,0035; ... vadinami dešimtainėmis trupmenomis arba dešimtainiais skaičiais. Šie skaičiai po kablelio turi vieną, du, tris, keturis, ... dešimtainius ženklus. Pirmasis po kablelio esantis skaitmuo yra dešimtųjų skaitmuo, antrasis – šimtųjų, trečiasis – tūkstantųjų ir t. t. Dešimtainio skaičiaus gale galima prirašyti kiek norima daug nulių, nuo to dešimtainės trupmenos reikšmė nekinta. Dešimtainės trupmenos gaunamos dalijant du sveikuosius skaičius.

Pavyzdžiai. Norint trupmeną $\frac{50}{8}$ išreikšti dešimtaine trupmena, dalijama 50 : 8. Gaunama dešimtainė trupmena 6,25. Norint dešimtainę trupmeną 16,33 pakeisti paprastąja, skaičiuojama taip: $16{,}33=16+\frac{33}{100}=\frac{1600+33}{100}=\frac{1633}{100}$.

Begalinės periodinės dešimtainės trupmenos

Pasitaiko atvejų, kai dalyba nesibaigia, kiek ją betęstum. Tokiu atveju dalmuo išreiškiamas skaitmenų seka, kuri pastoviai kartojasi. Tokios dešimtainės trupmenos vadinamos begalinėmis periodinėmis. Pasikartojantys skaitmenys užrašomi skliaustuose.

Pavyzdžiai: 10 : 6 = 1,6666... = 1,(6) (grynoji periodinė dešimtainė trupmena);
30 : 22 = 1,3636... = 1,(36) (grynoji periodinė dešimtainė trupmena);
48 : 550 = 0,08727272... = 0,08(72) (mišrioji periodinė dešimtainė trupmena, skaitmenys pradeda periodiškai kartotis po netaisyklingos skaitmenų sekos).

Veiksmai su dešimtainėmis trupmenomis

Sudedant (atimant) dešimtaines trupmenas, dešimtųjų skaitmenys sudedami (atimami) su dešimtųjų skaitmenimis, šimtųjų skaitmenys – su šimtųjų skaitmenimis ir t. t.

Pavyzdžiai. 8,463 + 2,65:

$$\begin{array}{r} 8,463 \\ +\ 2,650 \\ \hline 11,113 \end{array}$$

5,08 – 3,679:

$$\begin{array}{r} 5,080 \\ -\ 3,679 \\ \hline 1,401 \end{array}$$

Dauginant dešimtainę trupmeną iš skaičiaus, lygaus dešimties laipsniui, kablelis keliamas į dešinę per tiek skaitmenų, kiek dešimties laipsnis turi nulių. Dauginant dešimtainę trupmeną iš kitos dešimtainės trupmenos, jos sudauginamos kaip sveikieji skaičiai, nekreipiant dėmesio į kablelius, po to sandaugoje įrašomas kablelis taip, kad ji turėtų tiek dešimtainių ženklų, kiek jų turi abu daugikliai kartu.

Pavyzdžiai. 0,001344 · 10 000 = 13,44.
Dešimties laipsnis turi keturis nulius, todėl kablelis perkeliamas per keturis skaitmenis į dešinę.
17,04 · 1,3802.
Pirmiausia apskaičiuojame 1704 · 13 802 = 23 518 608.
Pirmasis daugiklis turi 2 dešimtainius ženklus, antrasis daugiklis – 4 dešimtainius ženklus, todėl rezultatas turi turėti 6 dešimtainius ženklus: 23,518 608.
0,12 · 0,3 · 0,5.
Pirmiausia apskaičiuojame 12 · 3 · 5 = 180.
Kadangi visi daugikliai kartu turi 4 dešimtainius ženklus, rezultatas yra toks: 0,0180.

> Dalijant vieną dešimtainę trupmeną iš kitos, abiejose dešimtainėse trupmenose kablelis perkeliamas per tiek dešimtainių ženklų į dešinę, kol daliklis tampa natūraliuoju skaičiumi.

Pavyzdys: 8,64 : 2,4 86,4 : 24 = 3,6

```
_86,4 | 24
 72   | 36
_ 144
  144
    0
```

Kablelis perkeltas per vieną ženklą į dešinę.

Dešimtainių trupmenų apvalinimas

Norint dešimtainę trupmeną suapvalinti reikia įsidėmėti štai ką: apvalinant su trūkumu, pirmasis paliekamas skaitmuo nekeičiamas; apvalinant su pertekliumi, pirmasis paliekamas skaitmuo padidinamas vienetu.

> Jeigu pirmasis (iš kairės) atmetamas skaitmuo yra 0, 1, 2, 3 arba 4, apvalinama su trūkumu, o jeigu pirmasis atmetamas skaitmuo yra 5, 6, 7, 8 arba 9, apvalinama su pertekliumi.

Pavyzdžiai. Skaičių 6,17589 reikia suapvalinti iki tūkstantųjų, taigi po kablelio turi likti trys dešimtainiai ženklai. Vadinasi, pirmasis atmetamas skaitmuo yra 8, todėl paskutinis paliekamas skaitmuo padidinamas vienetu. Suapvalintas skaičius yra toks: 6,176.

Skaičių 2,0128 reikia suapvalinti iki šimtųjų, taigi po kablelio turi likti du skaitmenys. Kadangi pirmasis atmetamas skaitmuo yra 2, paskutinis paliekamas skaitmuo nekeičiamas. Suapvalintas skaičius yra toks: 2,01.

Skaičių 4,999876 reikia suapvalinti iki šimtųjų. Kadangi pirmasis atmetamas skaitmuo yra 9, tai paskutinį paliekamą skaitmenį 9 reikia padidinti vienetu.

Šimtųjų vietoje atsiranda skaitmuo 10; tai reiškia, kad vienetu reikia padidinti dešimčių skaitmenį, kuris irgi pasidaro lygus 10. Vadinasi, vienetu reikia padidinti vienetų skaičių. Suapvalintas skaičius lygus 5,00.

2.11. Dydžiai ir vienetai

Dydžiai

Daugelis skaičių, su kuriais atliekami veiksmai, gauti kaip matavimo rezultatai. Jie turi pavadinimą ir norint juos skirti nuo grynųjų skaičių vadinami dydžiais.
Pavyzdžiai: 20 km, 45 cm, 32 s, 50 Lt, 450 kg ir t. t.

Vienetai

Matuojant lyginama su tam tikrais vienetais. Dydžio reikšmė nusakoma skaičiumi, kuris parodo, kiek kartų matavimo vienetas telpa matuojamajame dydyje. Yra praktiniai vienetai, tokie kaip 1 pakas (cukraus), 1 žingsnis (kambario ilgis), 1 karutis (žemės), 1 automobilio ilgis (eismas), 1 pulso tvinksnis (laikas). Pasaulyje pripažinti (sunorminti) vienetai – 1 metras, 1 kilogramas, 1 sekundė ir t. t.

Ilgio vienetai

Pagrindinis vienetas: 1 m (metras) – tai atstumas, kurį šviesos spindulys įveikia vakuume per 299792458-ąją sekundės dalį.
Išvestiniai vienetai: 1 dm (decimetras), 1 cm (centimetras), 1 mm (milimetras), 1 km (kilometras).
Perskaičiavimai: 10 mm = 1 cm, 10 cm = 1 dm, 10 dm = 1 m, 1000 m = 1 km, 1 jūrmylė = $\frac{9}{5}$ km.

Masės vienetai

Pagrindinis vienetas: 1 kg (kilogramas) – tai tarptautinio kilogramo prototipo masė.
Išvestiniai vienetai: 1 mg (miligramas), 1 g (gramas), 1 t (tona).
Perskaičiavimai: 1 g = 1000 mg, 1 kg = 1000 g, 1 t = 1000 kg.

Laiko vienetai

Pagrindinis vienetas: 1 s (sekundė) – tai apytiksliai 86400-oji dienos dalis. (Norint tiksliai apibūdinti sekundę, reikia fundamentalių atomo fizikos žinių.)
Išvestiniai vienetai: 1 min (minutė), 1 h (valanda), 1 d (diena).
Perskaičiavimai: 1 min = 60 s, 1 h = 60 min, 1 d = 24 h.

Greičio vienetai

Pagrindinis vienetas: 1 m/s (metras per sekundę).

Išvestiniai vienetai: 1 m/min (metras per minutę), 1 km/h (kilometras per valandą), 1 mazgas (mazgas = jūrmylė per valandą).

Perskaičiavimai: $1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\text{ m}}{\text{h}} = \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$$1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{0{,}001\text{ km}}{\text{s}} = 0{,}001\cdot 3600\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$1\text{ mazgas} = 1\,\frac{\text{jūrmylė}}{\text{h}}.$$

Piniginiai vienetai

Pagrindinis vienetas (Lietuvoje): 1 Lt (litas).

Išvestinis vienetas: 1 ct (centas).

Perskaičiavimas: 100 ct = 1 Lt.

Perskaičiavimai

Perskaičiuojant dydžių reikšmes iš vienų vienetų į kitus galioja tokia taisyklė: kai naująjį vienetą sudaro n senųjų vienetų, tai naujoji dydžio reikšmė yra $\frac{1}{n}$-toji senosios reikšmės dalis.

Pavyzdžiai. 7,2 cm reikia išreikšti dm ir m. Kadangi 1 dm sudaro 10 cm, tai naujoji reikšmė lygi 0,1 senosios reikšmės: 7,2 cm = 0,72 dm.

Kadangi 1 m sudaro 100 cm, tai naujoji reikšmė lygi 0,01 senosios reikšmės:

7,2 cm = 0,072 m.

42 min 16 s reikia išreikšti valandomis.

Pirmiausia laiką išreikškime sekundėmis.

42 min 16 s = 42 · 60 s + 16 s = 2536 s. Kadangi 1 h sudaro 3600 s, tai naujoji dydžio reikšmė lygi $\frac{1}{3600}$ senosios reikšmės: $2536\text{ s} = \frac{2536}{3600}\text{ h} = 0{,}70(4)\text{ h}$.

74,5 kg reikia išreikšti tonomis.

Kadangi 1 t sudaro 1000 kg, tai naujoji dydžio reikšmė lygi 0,001 senosios reikšmės: 74,5 kg = 0,0745 t.

3. Algebra

3.1. Sąryšiai

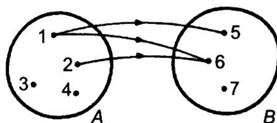
Apibrėžimas

Tarkime, nurodyta dviejų aibių A ir B sandauga $A \times B$. Bet kuris aibės $A \times B$ poaibis G nustato A ir B sąryšį, kuris žymimas $A \rho B$, skaitoma: A ro B. Jeigu šiuo sąryšiu elementui $a \in A$ priskirtas elementas $b \in B$, tai rašoma $a \rho b$. Aibė $G \subset A \times B$, apibūdinanti priskyrimo taisyklę, vadinama sąryšio grafiku.

$$a \rho b \leftrightarrow (a, b) \in G.$$

Pavyzdys

Tarkime, nurodytos aibės $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ir $B = \{5, 6, 7\}$. Aibė $G = \{(1; 5), (1; 6), (2; 6)\}$ nusako sąryšį tarp jų. Pažymėję šį sąryšį ρ, galime užrašyti: $1 \rho 5$, $1 \rho 6$ ir $2 \rho 6$. Grafiškai šį sąryšį galima pavaizduoti rodykline diagrama, kurioje rodyklėmis susiejami nurodytųjų aibių elementai.



Ekvivalentumo sąryšiai

Norint apibrėžti dviejų aibių sąryšį nebūtinai šios aibės turi būti skirtingos: sąryšiais galima susieti tos pačios aibės M elementus. Kai tokios rūšies sąryšis ρ tenkina išvardytas sąlygas, jis vadinamas ekvivalentumo sąryšiu:

$a \in M \to a \rho a$	refleksyvumas;
$a \rho b \leftrightarrow b \rho a$	simetrija;
$a \rho b \wedge b \rho c \to a \rho c$	tranzityvumas

Pavyzdys. Trikampių panašumas (simbolis $\sim$) yra ekvivalentumo sąryšis visų trikampių aibėje D. Pažymėkime bet kuriuos keturis iš panašiųjų trikampių aibės išrinktus trikampius

raidėmis d, a, b ir c. Tada teisingi sąryšiai:

refleksyvumo: $d \in D \rightarrow d \sim d$ (kiekvienas trikampis yra panašus pats į save);

simetrijos: $a \sim b \leftrightarrow b \sim a$ (jeigu trikampis a yra panašus į trikampį b, tai ir b yra panašus į a);

tranzityvumo: $a \sim b \wedge b \sim c \rightarrow a \sim c$ (jeigu trikampis a yra panašus į trikampį b ir trikampis b yra panašus į trikampį c, tai trikampis a yra panašus į trikampį c).

Pateikiame dar kelis ekvivalentumo sąryšių pavyzdžius: teiginių ekvivalentumas bet kurioje teiginių aibėje A, aibių lygumas bet kurioje aibėje M, aibių galios lygumas bet kurioje aibėje M, priklausančioje baigtinių netuščiųjų aibių visumai.

3.2. Struktūros

Operacijos

Operacija, apibrėžta aibėje M, yra sąryšis, kuris dviem elementams $a,\ b \in M$ vienareikšmiškai priskiria trečią elementą $c \in M$. Simboliais užrašoma: $a \circ b = c$.

Pavyzdžiai

Pagrindinės algebros operacijos: sudėtis, atimtis, daugyba ir dalyba. Geometrijos operacijos: postūmis, posūkis, veidrodinis atspindys, ištempis.

Struktūros

Darinys, susidedantis iš aibės ir joje apibrėžtos vienos ar daugiau operacijų, yra struktūra.

Labai svarbi matematikoje struktūra yra Abelio grupė (struktūra vadinama Abelio grupe, jeigu joje teisingas perstatomumo dėsnis). Ją sudaro aibė M ir operacija $\circ$, pasižyminti tokiomis savybėmis.

P Perstatomumas: $a, b \in M \rightarrow a \circ b = b \circ a$.

J Jungiamumas: $a, b, c \in M \rightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

N Neutralusis elementas: aibėje M yra neutralusis elementas ε, su kuriuo teisingas sąryšis: $a \in M \rightarrow a \circ \varepsilon = \varepsilon \circ a = a$.

A Atvirkštinis elementas: kiekvieną $a \in M$ atitinka $a' \in M$, su kuriuo teisingas sąryšis: $a \in M \rightarrow a \circ a' = a' \circ a = \varepsilon$.

3.3. Sveikųjų skaičių žiedas

Sveikųjų skaičių aibė kartu su apibrėžtomis joje operacijomis „+" ir „·" sudaro struktūrą (**Z**, +, ·), kuri vadinama sveikųjų skaičių žiedu.

Šios struktūros savybės

P	Perstatomumas:	$a, b \in \mathbf{Z} \rightarrow a + b = b + a$, $a, b \in \mathbf{Z} \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$.
J	Jungiamumas:	$a, b, c \in \mathbf{Z} \rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$, $a, b, c \in \mathbf{Z} \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
N	Neutralusis elementas:	$a \in \mathbf{Z} \rightarrow a + 0 = 0 + a = a$, $a \in \mathbf{Z} \rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
A	Atvirkštinis elementas:	$a \in \mathbf{Z} \rightarrow a + (-a) = (-a) + a = 0$.
S	Skirstomumo dėsnis:	$a, b, c \in \mathbf{Z} \rightarrow a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Pavyzdys

P $-3, -2 \in \mathbf{Z} \rightarrow (-3)+(-2) = (-2)+(-3) = -5,$

$\rightarrow (-3)\cdot(-2) = (-2)\cdot(-3) = 6.$

J $-3, -2, 4 \in \mathbf{Z} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{matrix} (-3+(-2))+4 = -3+(-2+4) = -1, \\ ((-3)\cdot(-2))\cdot 4 = -3((-2)\cdot 4) = 24. \end{matrix}$$

N $-3 \in \mathbf{Z} \rightarrow (-3)+0 = 0+(-3) = -3,$

$\rightarrow (-3)\cdot 1 = 1\cdot(-3) = -3.$

A $4 \in \mathbf{Z} \rightarrow 4+(-4) = (-4)+4 = 0.$

S $-3, -2, 4 \in \mathbf{Z} \rightarrow$

$\rightarrow -3\cdot(-2+4) = (-3)\cdot(-2)+(-3)\cdot 4.$

3.4. Racionaliųjų skaičių kūnas

Racionaliųjų skaičių aibė Q kartu su operacijomis „+“, „·“ sudaro struktūrą (Q, +, ·), vadinamą kūnu ir pasižyminčią tokiomis savybėmis.

P	Perstatomumas:	$a, b \in Q \to a+b=b+a,$
		$a, b \in Q \to a \cdot b = b \cdot a.$
J	Jungiamumas:	$a, b, c \in Q \to (a+b)+c=a+(b+c),$
		$a, b, c \in Q \to (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$
N	Neutralusis elementas:	$a \in Q \to a+0=0+a=a,$
		$a \in Q \to a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$
A	Atvirkštinis elementas:	$a \in Q \to a+(-a)=(-a)+a=0,$
		$a \in Q \setminus \{0\} \to a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$
S	Skirstomumo dėsnis:	$a, b, c \in Q \to a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Pavyzdys

P $\frac{2}{7}, \frac{3}{7} \in Q \to \frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7},$

$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{49}.$

J $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{5}{9} \in Q \to$

$\to \left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)+\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{4}{9}+\left(\frac{2}{9}-\frac{5}{9}\right)=\frac{1}{9},$

$\to \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)\right)=-\frac{40}{729}.$

N $\frac{1}{2} \in Q \to \frac{1}{2}+0=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$

$\frac{1}{2} \in Q \to \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

A $\frac{2}{3} \in Q \to \frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=0,$

$\frac{2}{3} \in Q \to \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1.$

S $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \in Q \to \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}+\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}.$

3.5. Algebriniai reiškiniai

Apibrėžimas

Kintamųjų reiškiniu vadinami arba patys kintamieji, arba prasmingi skaičių, kintamųjų, veiksmų ir skliaustų dariniai. Įrašius vietoj kintamojo tam tikrą skaičių, turimas skaitinis reiškinys, kurį apskaičiavus gaunama reiškinio reikšmė.

Pavyzdžiai. Kintamųjų reiškiniai: a, $2a$, $a+b+c$, $a(p+q)$, $5x(3a-5b)$, $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y$, $(u+v)^2$, ...
Įrašę reiškinyje $2ab(a - 3b)$ reikšmes $a = 3$ ir $b = 1$, gauname skaitinį reiškinį $2\cdot3\cdot1\cdot(3-3\cdot1)$, kurio reikšmė lygi 0.

Reiškinių sudėtis ir atimtis

Reiškiniai, kuriuos sudaro tokie pat kintamieji, vadinami panašiaisiais.

Sudedant arba atimant galima sutraukti tik panašiuosius dėmenis.

Pavyzdžiui, $a + a + a + a = 4a$, priešingai, algebrinės sumos $a + b + c$ dėmenų negalima sutraukti. Skaičius 4 vadinamas koeficientu. Koeficientas 1 nerašomas ($1a = a$), daugybos ženklas tarp koeficientų ir kintamųjų paprastai praleidžiamas. Kai reiškiniuose yra skliaustai, veiksmai atliekami pagal tokias taisykles:

$$a+(b+c)=a+b+c;$$
$$a+(b-c)=a+b-c;$$
$$a-(b+c)=a-b-c;$$
$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Pavyzdys. $4a-2b-(6a+3b)-(-2a-b)=4a-2b-6a-3b+2a+b=$
$=4a-6a+2a-2b-3b+b=0a-4b=-4b.$

Reiškinių daugyba

Dviejų kintamųjų a ir b sandauga užrašoma reiškiniu ab, kuriame daugybos ženklas tarp raidžių nerašomas. Vienodų kintamųjų sandauga užrašoma kaip jų laipsnis. Sudauginant vienanarius vieną su kitu, pirmiausia sudauginami jų koeficientai (su jų ženklais), po to – kintamieji.

Pavyzdys: $8uv\cdot(-2)v^2z\cdot\frac{1}{2}u^2vz^2=8\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot u\cdot u^2\cdot v\cdot v^2\cdot v\cdot z\cdot z^2=$
$=-8u^3v^4z^3.$

Sudauginant vienanarį su dvinariu (arba su daugianariu) taikomas skirstomumo dėsnis (žr. racionaliųjų skaičių kūną, p. 49): $a(b+c)=ab+ac$.

Pavyzdžiai: $-4m(-2x+3y)=8mx-12my$;
$3a(5a^2b-4ab^2)=15a^3b-12a^2b^2$.

Sudauginant du dvinarius vieną su kitu, taikoma formulė

$$(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by,$$

kuri išplaukia iš skirstomumo dėsnio.

Pavyzdžiai: $(3c+4d)(2x+3y)=6cx+9cy+8dx+12dy$;
$(-a-3b)(2a-5b)=-2a^2+5ab-6ab+15b^2=$
$=-2a^2-ab+15b^2$.

Binominės (dvinarės) formulės

Dauginant binomus gaunamos greitosios daugybos formulės. (Binomais vadinami dvinariai – reiškiniai, gauti sumuojant (arba atimant) skirtingus kintamuosius.)

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2;$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Pavyzdžiai: $(2x+5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$;

$(2a-3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$;

$(3x-1)(3x+1) = 9x^2 - 1$;

$\left(\frac{4}{5}e - \frac{3}{4}f\right)^2 = \frac{16}{25}e^2 - \frac{6}{5}ef + \frac{9}{16}f^2$.

Iškėlimas prieš skliaustus

Kai sumos dėmenys turi bendrųjų daugiklių, šiuos daugiklius galima iškelti prieš skliaustus. Tada suma pakeičiama sandauga.

Pavyzdžiai: $6ax + 3ay = 3a \cdot 2x + 3a \cdot y = 3a(2x + y)$;

$2a^2x + 4ax^2 = 2ax \cdot a + 2ax \cdot x = 2ax(a + x)$;

$-u - v - z = -(u + v + z)$;

$xy - x = x \cdot y - x \cdot 1 = x(y-1)$.

Kartais sumą pavyksta pakeisti sandauga, sugrupuojant jos dėmenis ir iškeliant bendruosius daugiklius prieš skliaustus. Bendrieji daugikliai gali būti ir dvinariai reiškiniai.

Pavyzdžiai: $au + av + 2bu + 2bv = a(u+v) + 2b(u+v) = (u+v)(a+2b)$;

$-3rp + 2qs + qr - 6ps = -3rp + qr - 6ps + 2qs =$

$= r(-3p+q) + 2s(-3p+q) = (-3p+q)(r+2s)$.

Pritaikius binomines formules, perskaitytas iš dešinės į kairę, sumas taip pat galima pakeisti sandaugomis.

Pavyzdžiai: $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x-3y)^2$;

$9x^2 - 25y^2 = (3x+5y)(3x-5y)$;

$36p^2 - 1 = 36p^2 - 1^2 = (6p+1)(6p-1)$;

$12m^2 - 27n^2 = 3(4m^2 - 9n^2) = 3(2m+3n)(2m-3n)$.

Reiškinio keitimas dvinario kvadratu

Dvinario T_1 kvadratu vadinamas reiškinys T_2, kai $T_2 = T_1^2$.

Pavyzdžiai. $x^2 - 18x$ galima papildyti iki dvinario kvadrato:

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 9 + 9^2 = (x-9)^2$ (2-oji binominė formulė).

Reiškinys $T(x) = 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ dvinario kvadratu išreiškiamas taip:

$$T(x) = 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right) = 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right).$$

Yra binominių formulių, atitinkančių didesnius laipsnius. Labai svarbios šios formulės:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

...

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Pavyzdžiai: $(3m+2n)^3 = 27m^3 + 3 \cdot 9m^2 \cdot 2n + 3 \cdot 3m \cdot 4n^2 + 8n^3 =$

$= 27m^3 + 54m^2n + 36mn^2 + 8n^3;$

$(3a-b)^3 = 27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3;$

$27x^3 + 125y^3 = (3x+5y)(9x^2 - 15xy + 25y^2);$

$8u^3 - v^3 = (2u-v)(4u^2 + 2uv + v^2).$

Įsidėmėtina, kad reiškinių, esančių antruose skliaustuose, negalima toliau skaidyti taikant binomines formules.

Niutono binomas

Kai n – bet kuris didesnis laipsnio rodiklis, taikoma formulė

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Skaičiai C_n^0, C_n^1, C_n^2, ... ,C_n^{n-1}, C_n^n vadinami binominiais koeficientais. Jie apskaičiuojami pagal formulę

$$C_n^k{}^* = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k}.$$

n ir k yra natūralieji skaičiai, k negali būti didesnis už n. Įsidėmėkite, kad

$$C_n^n = C_n^0 = 1 \quad \text{ir} \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

Pavyzdys: $C_{10}^6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210.$

Niutono binomo pavyzdys:

$$(x-y)^7 = x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 -$$
$$-21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7.$$

Pertvarkę $(x+2y)^6$ į sumą, raskime jos ketvirtąjį narį:

$$k = 3: \; C_6^3 x^{6-3}(2y)^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3\cdot 8y^3 = 160x^3y^3.$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0\cdot 1^0\cdot 1^n + C_n^1\cdot 1\cdot 1^{n-1} + C_n^2\cdot 1^2\cdot 1^{n-2} + ... +$$
$$+C_n^{n-1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1 + C_n^n\cdot 1,$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Paskalio trikampis

Binominius koeficientus nesunku rasti sudarius skaičių trikampį. Norint surasti, pavyzdžiui, binomo, keliamo šeštuoju laipsniu, koeficien-

* Dar vartojamas toks žymėjimas: $C_n^k = \binom{n}{k}$ (*vertėjo pastaba*).

tus, reikia žinoti visus binomų, keliamų mažesniais laipsniais, koeficientus.

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

ir t. t.

Trikampis sudaromas taip: dviejų gretimų skaičių suma yra skaičius, parašytas po jais.

> Koeficientas C_n^k yra $(n + 1)$-osios eilutės ir $(k + 1)$-ojo stulpelio sankirtoje.

Pavyzdys. Koeficientas C_4^2 yra 5-oje eilutėje ir 3-iame stulpelyje ir lygus 6.

3.6. Lygtys

Bendrosios sąvokos

> Tarkime, $T_1(x)$ ir $T_2(x)$ yra du kintamojo x reiškiniai, apibrėžti atitinkamai aibėse D_1 ir D_2. Teiginio funkcija $T_1(x) = T_2(x)$, apibrėžta pagrindinėje aibėje $G = D_1 \cap D_2$, vadinama kintamojo x lygtimi.

Pagrindinė lygties aibė G dažniausiai vadinama lygties apibrėžimo sritimi D. Teiginio funkcijos $T_1(x) = T_2(x)$ sprendinių aibė vadinama lygties sprendinių aibe. Svarbiausias su lygtimi siejamas uždavinys – jos sprendinių aibės suradimas.

Labai paprastų lygčių sprendinių aibes galima rasti patikrinant, ar joms tinka tam tikri skaičiai.

Pavyzdžiai: $2 \cdot |x| = 6,\ D = \boldsymbol{N}$;

$x = -3 \Rightarrow 2 \cdot |-3| = 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ (tinka),

$x = 3 \Rightarrow 2 \cdot |3| = 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ (tinka), taigi

lygties sprendinių aibė yra $\{-3, 3\}$.

$x^2 - x = 0,\ G = \boldsymbol{Q}$;

$x = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$ (tinka),

$x = 1 \Rightarrow 1^2 - 1 = 0$ (tinka), taigi sprendinių aibė yra $\{0, 1\}$.

Kai sprendinių aibės negalima rasti tiesiogiai, lygtis keičiama jai ekvivalenčiomis lygtimis, apibrėžtomis toje pačioje pagrindinėje aibėje, kol gaunama nesunkiai išsprendžiama lygtis. Lygties pertvarkis yra ekvivalentusis, jeigu pradinės lygties ir po pertvarkio gautos lygties sprendinių aibės yra vienodos.

Pavyzdys: $D = \boldsymbol{Q}$.

Pradinė lygtis: $4x + 2 = 14$, sprendinių aibė $\{3\}$.

1 pertvarkis: $4x + 2 - 2 = 14 - 2$, sprendinių aibė $\{3\}$.

2 pertvarkis: $4x = 12$, sprendinių aibė $\{3\}$.

3 pertvarkis: $4x : 4 = 12 : 4$, sprendinių aibė $\{3\}$.

4 pertvarkis: $x = 3$, sprendinių aibė $\{3\}$.

> Lygtis pertvarkoma ekvivalenčiai, kai prie jos abiejų pusių pridedamas (arba atimamas) tas pats skaičius (toks pat reiškinys*) arba abi lygties pusės padauginamos (arba padalijamos) iš nelygaus nuliui skaičiaus (iš reiškinio, kurio reikšmė nelygi nuliui).

Pavyzdžiai. $D = \boldsymbol{Q}$.

Pradinė lygtis: $4x - 10 = -6x + 20$.

1 pertvarkis: $4x - 10 + 10 = -6x + 20 + 10$,

$4x = -6x + 30$.

2 pertvarkis: $4x + 6x = -6x + 6x + 30$,

$10x = 30$.

3 pertvarkis: $10x : 10 = 30 : 10$,

$x = 3$, sprendinių aibė $\{3\}$.

---

* Jis turi būti apibrėžtas toje pačioje aibėje kaip ir pradinė lygtis (*vertėjo pastaba*).

$D = \mathbf{Q}$.

Pradinė lygtis: $2(2x - 8) + 6 = -4(-x + 6) + 14$.

1 pertvarkis: $4x - 16 + 6 = 4x - 24 + 14$.

2 pertvarkis: $4x - 10 = 4x - 10$.

Lygtis teisinga su bet kuriomis x reikšmėmis, todėl sprendinių aibė lygi $\mathbf{Q}$.

Tiesinės lygtys

Lygtis vadinama tiesine (arba pirmojo laipsnio), jeigu ją galima ekvivalenčiai pertvarkyti į lygtį $ax + b = 0$; čia $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Tiesinės lygties $ax + b = 0$ sprendinių aibė yra $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Pavyzdys: $\frac{1}{3}x + 6 = 0$, sprendinių aibė $\{-18\}$.

Trupmeninės lygtys – tai lygtys, kurių kintamasis x bent vieną kartą parašytas vardiklyje.

Pavyzdžiai. $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) \cdot 5 = \frac{2}{3x} + \frac{1}{6}$; atskliaučiame.

$\frac{5}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{2}{3x} + \frac{1}{6}$; surandame bendrąjį vardiklį.

$\frac{6 \cdot 5}{6x} - \frac{3 \cdot 5}{6x} = \frac{2 \cdot 2}{6x} + \frac{x}{6x}$; padauginame iš $6x$.

$30 - 15 = 4 + x$; sutraukiame panašiuosius narius.

$15 = 4 + x$,

$11 = x$, sprendinių aibė $\{11\}$.

$\frac{4}{2x-4} + \frac{12}{2x+4} = \frac{16}{(x+2)(x-2)}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Pirmiausia reikia surasti bendrąjį vardiklį, kuris yra trijų vardiklių mažiausias bendrasis kartotinis.

1 vardiklis: $2x - 4 = 2(x - 2)$;

2 vardiklis: $2x + 4 = 2(x + 2)$;

3 vardiklis: $(x + 2)(x - 2)$.

Bendrasis vardiklis: $2(x + 2)(x - 2)$.

Padauginame kiekvieną lygties trupmeną iš bendrojo vardiklio ir suprastiname trupmenas:

$4(x+2)+12(x-2)=16\cdot 2$, atskliaučiame;

$4x+8+12x-24=32$, sutraukiame panašiuosius narius;

$16x-16=32$,

$16x=48$, $x=3$, sprendinių aibė $\{3\}$.

Tekstiniai uždaviniai. Daug praktinių uždavinių, kuriuos galima matematiškai išspręsti, apibūdinami lygtimis. Paprastai ieškomasis dydis pažymimas x ir tekste suformuluotos sąlygos užrašomos matematiniais reiškiniais.

Pavyzdžiai. Padvigubintas skaičius sumažinamas vienetu ir padalijamas iš keturgubo pradinio skaičiaus, padidinto dviem vienetais. Gaunamas skaičius 0,25.

Ieškomasis skaičius: x.

Sąlyga: $\frac{2x-1}{4x+2}=\frac{1}{4}$, $D=\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Sprendimas: $4(2x-1)=1(4x+2)$,

$4x-4=2$,

$4x=6$, $x=1,5$.

Atsakymas: ieškomasis skaičius yra 1,5.

Tam tikrą darbą P padaro per 7 dienas ir 4 valandas, o P ir Q, dirbdami kartu, tą darbą padaro per 24 valandas. Per kiek dienų padarytų šį darbą Q, dirbdamas vienas? (1 darbo diena = 8 valandos.)

Per 1 val. P padaro $\frac{1}{60}$ darbo dalį.

Per 1 val. Q padaro $\frac{1}{x}$ darbo dalį.

Per 1 val. P ir Q kartu padaro $\frac{1}{24}$ darbo dalį.

Sąlyga: $\frac{1}{60}+\frac{1}{x}=\frac{1}{24}$, $D=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Sprendimas: $2x+120=5x$, bendrasis vardiklis yra $120x$.

$120=3x$, $x=40$.

Atsakymas: Q turi dirbti 40 val. arba 5 dienas.

Yra 90 % ir 47 % koncentracijos sieros rūgšties. Reikia sumaišyti ir gauti 3 litrus 60 % koncentracijos sieros rūgšties. Kiek litrų reikia paimti kiekvienos koncentracijos sieros rūgšties?
90 % koncentracijos rūgšties: x litrų.
47 % koncentracijos rūgšties: $3 - x$ litrų.

Sąlyga: $x \cdot 0{,}9 + (3 - x) \cdot 0{,}47 = 3 \cdot 0{,}6.$

Sprendimas: $0{,}9x + 1{,}41 - 0{,}47x = 1{,}8,$
$0{,}43x = 0{,}39, \; x = 0{,}907.$

Atsakymas: reikia sumaišyti 0,907 litro 90 % koncentracijos ir 2,093 litro 47 % koncentracijos sieros rūgšties.

Lygtys su parametrais. Parametras – tai skaičius, kurio reikšmė nėra nurodyta. Kai lygtyje yra parametras, ši lygtis apibūdina lygčių šeimą, sudarytą iš tokios pačios struktūros be galo daug lygčių. Lygtys su parametrais sprendžiamos pagal tokią pat schemą, kaip ir lygtys be parametrų.

Pavyzdys.	$2x + a(3x - 1) = 4ax + 2, \; D = \boldsymbol{Q}.$	
	$a \in \boldsymbol{Q}$	yra parametras; atskliaučiame.
	$2x + 3ax - a = 4ax + 2;$	pridedame a.
	$2x + 3ax = 4ax + 2 + a;$	atimame $4ax$.
	$2x - ax = 2 + a;$	iškeliame x prieš skliaustus.
	$x(2 - a) = 2 + a.$	

Pertvarkant lygtį toliau, reikia skirti du atvejus:

1 atvejis: $a \neq 2 \Rightarrow x = \dfrac{2+a}{2-a}$, sprendinių aibė $\left\{\dfrac{2+a}{2-a}\right\}$;
2 atvejis: $a = 2 \Rightarrow x \cdot 0 = 2 + a$, sprendinių aibė $\varnothing$.
$(a^2 - 1)x = a + 1 \Leftrightarrow (a - 1)(a + 1)x = a + 1.$

1 atvejis: $a \in \boldsymbol{Q} \setminus \{-1, \; 1\}, \; x = \dfrac{a+1}{(a+1)(a-1)},$

$x = \dfrac{1}{a-1}$, sprendinių aibė $\left\{\dfrac{1}{a-1}\right\}$;

2 atvejis: $a \in \{-1, \; 1\}$, sprendinių aibė $\varnothing$.

Kvadratinės lygtys

Lygtis yra kvadratinė (arba antrojo laipsnio), kai ją galima ekvivalenčiai pertvarkyti į lygtį $ax^2+bx+c=0$; čia $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$.

Lygtis $ax^2+bx+c=0$ yra bendrosios išraiškos kvadratinė lygtis. Jos sprendinių formulės gaunamos išskiriant kairėje pusėje dvinario kvadratą. Praktiškai lygties sprendiniai randami taikant formules:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Pošakninis reiškinys vadinamas diskriminantu. Nuo jo priklauso sprendinių kiekis.

$b^2-4ac>0 \Rightarrow$ sprendinių aibė $\left\{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$ (2 sprendiniai),

$b^2-4ac=0 \Rightarrow$ sprendinių aibė $\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ (1 sprendinys),

$b^2-4ac<0 \Rightarrow$ sprendinių aibė $\varnothing$ (realiųjų sprendinių nėra).

Jeigu pagrindine aibe parinkta kompleksinių skaičių aibė, tai trečiuoju atveju lygtis turi du kompleksinius sprendinius.

Pavyzdys: $3x^2+4x-4=0,\ a=3,\ b=4,\ c=-4;$

$$3x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \vee x=-2 \Rightarrow \text{sprendinių aibė } \left\{-2, -\frac{2}{3}\right\}.$$

Lygtis $x^2+px+q=0$ (koeficientas prie x^2 yra 1) vadinama redukuotąja kvadratine lygtimi. Jos sprendinių formulė tokia:

$$x^2+px+q=0 \Leftrightarrow x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Pavyzdys: $x^2-3x+2=0,\ p=-3,\ q=2;$

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\left(-\frac{3}{2}\right)\pm\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \Rightarrow$ sprendinių aibė $\{1,\ 2\}$.

Kai lygties koeficientas b arba c (atitinkamai p arba q) yra lygūs nuliui, ją galima išspręsti netaikant sprendinių formulės. Jas lengviau ir greičiau išspręsti traukiant iš abiejų pusių šaknį arba skaidant daugikliais.

Pavyzdžiai. $4x^2-1=0,\ D=\boldsymbol{R};$ pridedame 1.

$4x^2=1;$ padalijame iš 4.

$x^2=\frac{1}{4};$ iš abiejų pusių ištraukiame šaknį.

$|x|=\frac{1}{2};$ praleidžiame modulio ženklą.

$\pm x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$, sprendinių aibė $\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$.

$400x^2-80x=0,\ D=\boldsymbol{R};$ iškeliame $80x$ prieš skliaustus.

$80x(5x-1)=0.$

Pritaikę taisyklę, jog sandauga lygi nuliui tada, kai pirmasis arba antrasis daugiklis lygus nuliui, gauname:

$80x=0 \vee 5x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{5}$,

sprendinių aibė $\left\{0,\ \frac{1}{5}\right\}$.

Kai x_1 ir x_2 yra kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ sprendiniai, tai lygties sprendinius ir jos koeficientus sieja tokie sąryšiai.

Vieto teorema:

$x_1+x_2=-p;\ x_1\cdot x_2=q.$

Kai x_1 ir x_2 yra kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ sprendiniai, reiškinys x^2+px+q išskaidomas tiesinių daugiklių sandauga.

Tiesinių daugiklių sandauga: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Pavyzdys. Kvadratinė lygtis $x^2 - 5x + 6 = 0$ turi sprendinius $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Reiškinys $x^2 - 5x + 6$ išskaidomas tiesiniais daugikliais taip:

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

Trupmeninės lygtys

Pavyzdys. $\frac{10x}{3x+7} + \frac{4}{x+3} = 2$, $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{7}{3}, -3\right\}$.

Lygtis padauginama iš bendrojo vardiklio $(3x+7)(x+3)$ ir trupmenos suprastinamos:

$10x(x+3) + 4(3x+7) = 2(3x+7)(x+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 30x + 12x + 28 = 6x^2 + 18x + 14x + 42 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 42x + 28 = 6x^2 + 32x + 42 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 10x - 14 = 0$ – tai bendrosios išraiškos lygtis.

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 4 \cdot 14}}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 18}{8} \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \vee x = 1,$$

sprendinių aibė $\left\{-\frac{7}{2}, 1\right\}$.

Aukštesniojo laipsnio lygtys

Aukštesniojo laipsnio lygtys sprendžiamos pertvarkant jas į ekvivalenčias lygtis. Nagrinėjami atskiri tokių lygčių tipai. Bendruoju atveju jos sprendžiamos apytiksliai, panaudojant tam skirtas kompiuterines programas.

Jei žinoma, kad 3-iojo laipsnio lygtis turi bent vieną sveikąjį sprendinį, tai jis surandamas išbandant konkrečias reikšmes. Pritaikę daugianario dalybą, gauname 2-ojo laipsnio lygtį.

Pavyzdys. $3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$.

Nuosekliai bandydami (įrašydami vieną po kito $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$), randame sprendinį $x = 3$. Todėl kairėje lygties pusėje esantį reiškinį dalijame iš $x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 & x - 3 \\ -\underline{(3x^3 - 9x^2)} & 3x^2 - x + 4 \\ -x^2 + 7x & \\ -\underline{(-x^2 + 3x)} & \\ 4x - 12 & \\ -\underline{(4x - 12)} & \\ 0 & \end{array}$$

Vadinasi, $(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3) = 3x^2 - x + 4$.
Daugianariai dalijami panašiai kaip ir skaičiai.
Jei lygtis turi kitų sprendinių, tai jie yra kvadratinės lygties $3x^2 - x + 4 = 0$ sprendiniai. Tačiau šios lygties diskriminantas mažesnis už nulį, todėl lygtis daugiau realiųjų sprendinių neturi.
Lygties sprendinių aibė pagrindinėje aibėje $\boldsymbol{R}$ yra $\{3\}$.

Kai lygtyje nėra laisvojo nario, pirmas ekvivalentusis pertvarkis yra x iškėlimas prieš skliaustus.

Pavyzdžiai. $x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 10) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 5$,
sprendinių aibė $\{-2,\ 0,\ 5\}$.
$x^4 - 3x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3 = 0 \vee (x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$,
sprendinių aibė $\{0,\ 3\}$.

Jeigu 4-ojo laipsnio lygtyje nėra dėmenų, kuriuose x pakeltas nelyginiais laipsniais, tokia lygtis sprendžiama panaudojant keitinį.

Pavyzdys. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, keitinys $x^2 = z$.
$z^2 - 5z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 1 \vee z = 4$. Grįžtame prie senojo kintamojo:
$x = \pm\sqrt{z}$.
$x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$,
sprendinių aibė $\{-2, -1, 1, 2\}$.

Iracionaliosios lygtys

Yra lygčių, kurių kintamasis parašytas pošaknyje. Keliant laipsniu tokia lygtis paprastai pertvarkoma į tiesinę arba kvadratinę lygtį. Kadangi kėlimas laipsniu nėra ekvivalentusis pertvarkis, tai po kiekvieno žingsnio turime sekti, ar nepakito sprendinių aibė.

Pavyzdys. $\sqrt{5x+5}=3-2x \Rightarrow \left(\sqrt{5x+5}\right)^2=(3-2x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x+5=9-12x+4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-17x+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{17\pm\sqrt{289-4\cdot4\cdot4}}{2\cdot4} \Leftrightarrow x=4 \vee x=\dfrac{1}{4}.$

Įrašę abu sprendinius į pradinę lygtį įsitikiname, kad tinka tik sprendinys $x=\frac{1}{4}$, todėl lygties sprendinių aibė $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

3.7. Nelygybės

> Tarkime, nurodyti reiškiniai $T_1(x)$ ir $T_2(x)$, kurie apibrėžti atitinkamai aibėse D_1 ir D_2. Teiginio funkcija $T_1(x) < T_2(x)$, apibrėžta pagrindinėje aibėje $G = D_1 \cap D_2$, vadinama kintamojo x nelygybe.

$T_1(x) \le T_2(x)$ yra disjunkcija: $T_1(x) < T_2(x) \vee T_1(x) = T_2(x)$.

$T_1(x) > T_2(x)$ yra ekvivalenti $T_2(x) < T_1(x)$.

$T_1(x) \ge T_2(x)$ yra disjunkcija: $T_1(x) > T_2(x) \vee T_1(x) = T_2(x)$.

Kai pagrindinė aibė yra $\boldsymbol{Q}$ arba $\boldsymbol{R}$, bendruoju atveju nelygybės sprendinių aibę sudaro intervalai. Intervalams žymėti naudojami laužtiniai arba lenktiniai skliaustai. Pagal tai, ar intervalui priklauso jo galų taškai, ar ne, skiriami tokie intervalai:

uždarasis intervalas arba atkarpa:	$a \le x \le b$, $[a; b]$;
pusiau atvirieji intervalai:	$a \le x < b$, $[a; b)$;
	$a < x \le b$, $(a; b]$;
atvirasis intervalas:	$a < x < b$, $(a; b)$.

Tiesinės nelygybės

Nelygybė, apibrėžta aibėje D, vadinama tiesine arba pirmojo laipsnio, jeigu ją galima pertvarkyti į nelygybę $ax + b < 0$; čia $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$.

Pavyzdžiai. $-4x+6<5 \Leftrightarrow -4x<-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$.

Pasinaudota savybe, jog dalijant arba dauginant abi nelygybės puses iš neigiamojo skaičiaus, keičiamas nelygybės ženklas. Sprendinių aibė yra intervale $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

$\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}\geq\frac{17}{4}-\frac{3}{2}x$; dauginame iš 8.

$2x+36\geq 34-12x$; pridedame $12x$, atimame 36 ir dalijame iš 14.

$14x\geq -2$,

$x\geq -\frac{1}{7}$, sprendinių aibė yra intervale $\left[-\frac{1}{7}; +\infty\right)$.

Trupmeninės nelygybės. Jos sprendžiamos specialiu būdu. Pirmiausia jos pertvarkomos į nelygybę $\frac{a}{b}>0$ $\left(\frac{a}{b}<0\right)$.

Toliau reikia skirti tokius atvejus:

1 atvejis: $a > 0 \wedge b > 0$ (atitinkamai $a > 0 \wedge b < 0$) arba

2 atvejis: $a < 0 \wedge b < 0$ (atitinkamai $a < 0 \wedge b > 0$).

Pavyzdys. $D=\boldsymbol{R}\setminus\{-2\}$, $\frac{x-2}{x+2}<3 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2}-3<0$;

$\frac{-2x-8}{x+2}<0$. Kadangi trupmenos reikšmės yra neigiamos, tai skaitiklis ir vardiklis turi būti priešingų ženklų. Taigi turime skirti atvejus:

$-2x-8>0 \wedge x+2<0 \vee -2x-8<0 \wedge x+2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x>8 \wedge x+2<0 \vee -2x<8 \wedge x>-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-4 \wedge x<-2 \vee x>-4 \wedge x>-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-4 \vee x>-2$.

$L_1=(-\infty; -4)$, $L_2=(-2; +\infty)$.

$L=L_1\cup L_2=(-\infty; -4)\cup(-2; +\infty)$.

Nelygybės su modulio ženklais. Jos sprendžiamos specialiu būdu nagrinėjant du atvejus, kai reiškinys po modulio ženklu yra ≥ 0 arba < 0. Toliau sprendžiamos panašiai kaip ir trupmeninės nelygybės.

Pavyzdys: $|x-1|<5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \wedge x-1<5 \vee x-1<0 \wedge -(x-1)<5 \Leftrightarrow$

(čia pirmasis konjunkcijos teiginys apibūdina po modulio ženklu esančio reiškinio ženklą, antrasis konjunkcijos teiginys yra nurodytoji nelygybė)

$\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x<6 \vee x<1 \wedge x>-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L_1=[1;\ 6),\ L_2=(-4;\ 1),$

$L=L_1 \cup L_2=(-4;6).$

Kvadratinės nelygybės

> Nelygybė, apibrėžta aibėje D, vadinama kvadratine arba antrojo laipsnio nelygybe, jeigu ją galima pertvarkyti į nelygybę $ax^2+bx+c<0$, kai $a \neq 0$; čia a, b, $c \in \boldsymbol{R}$.

Spręsdami kvadratines nelygybes, kairiąją jų pusę, jei tik galima, išskaidome tiesiniais daugikliais. Toliau remiamės tokiais samprotavimais: sandauga yra neneigiama tada, kai abu daugikliai yra vienodų ženklų arba lygūs nuliui, ir sandauga yra neigiama, kai abu daugikliai yra priešingų ženklų.

Pavyzdys: $x^2-7x+10<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2>0 \wedge x-5<0 \vee x-2<0 \wedge x-5>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>2 \wedge x<5 \vee x<2 \wedge x>5 \Leftrightarrow x>2 \wedge x<5,$

sprendinių aibė yra intervale (2; 5).

Kai kairiosios nelygybės pusės negalima išskaidyti tiesiniais daugikliais, tai nelygybė yra arba teisinga su visais x, priklausančiais realiųjų skaičių aibei $\boldsymbol{R}$, arba klaidinga su visais x (sprendinių aibė $\varnothing$). Tai galima nesunkiai patikrinti įrašant konkrečias x reikšmes.

Pavyzdžiai. $x^2+20x+130 \geq 0.$

Kvadratinė lygtis $x^2+20x+130=0$ neturi realiųjų sprendinių, todėl jos kairiosios pusės negalima išskaidyti tiesiniais daugikliais. Parinkime, pavyzdžiui, $x = 1$ ir įrašykime šią reikšmę į nelygybę:

$1^2+20\cdot 1+130\geq 0 \Leftrightarrow 151\geq 0$ (teisinga nelygybė), taigi sprendinių aibė yra $\boldsymbol{R}$.
Priešingai, nėra nė vienos x reikšmės, su kuria iš nelygybės $x^2+20x+130\leq 0$ būtų gautas teisingas teiginys, todėl sprendinių aibė yra $\varnothing$.

3.8. Netiesinės sistemos

Dvi lygtys su dviem nežinomaisiais

Iš dviejų kintamųjų $x\in\boldsymbol{R}$ ir $y\in\boldsymbol{R}$ galima sudaryti kintamųjų porą $(x; y)$, kurią laikome aibės $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ kintamuoju, $(x; y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$.

Kintamojo $(x; y)$ teiginio funkcija, apibrėžta pagrindinėje aibėje $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$, vadinama netiesine antrojo laipsnio lygčių su dviem nežinomaisiais sistema, jeigu ji apibūdinama tokiomis formulėmis:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases}$$

Kai sistemą sudaro lygtys, kurių viena yra antrojo laipsnio, o kita – tiesinė, tokia sistema sprendžiama kintamojo keitimo metodu. Iš tiesinės lygties vienas kintamasis išreiškiamas kitu ir gauta jo išraiška įrašoma į kitą lygtį.

Pavyzdžiai: $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x=7-y; \end{cases}$ $\begin{cases} (7-y)^2+y^2=25, \\ x=7-y; \end{cases}$

$\begin{cases} 49-14y+y^2+y^2=25, \\ x=7-y; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y^2-14y+24=0, \\ x=7-y; \end{cases}$

$\begin{cases} y=\dfrac{14\pm\sqrt{196-4\cdot 2\cdot 24}}{4}, \\ x=7-y; \end{cases}$ $\begin{cases} y=4\vee y=3, \\ x=7-y; \end{cases}$

$\begin{cases} y=4\vee y=3, \\ x=3\vee y=4; \end{cases}$ sprendinių aibė $\{(3; 4),\ (4; 3)\}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{y-1}=1, \\ (x-3)(y-2)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=y-1, \\ xy-2x-3y+6=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1, \\ (y+1)y-2(y+1)-3y+6=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1, \\ y^2-4y+4=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases}$$ sprendinių aibė $\{(3;\ 2)\}$.

3.9. Tiesinės sistemos

Dvi lygtys su dviem nežinomaisiais

Iš dviejų kintamųjų $x \in \boldsymbol{R}$ ir $y \in \boldsymbol{R}$ galima sudaryti kintamųjų porą $(x;\ y)$, kurią laikome aibės $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ kintamuoju, taigi $(x;\ y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$.

Kintamojo $(x;\ y)$ teiginio funkcija, apibrėžta pagrindinėje aibėje $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$, vadinama tiesine lygčių su dviem nežinomaisiais sistema, jeigu ji apibūdinama taip:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2; \end{cases}$$

čia $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} \in \boldsymbol{R}$ yra konstantos. Joms žymėti naudojamas dvigubas indeksas, kuris nusako konstantos a vietą lygčių sistemoje.

Trys lygtys su trimis nežinomaisiais

Iš trijų kintamųjų $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$ ir $z \in \boldsymbol{R}$ galima sudaryti kintamųjų trejetą, kurį laikome aibės $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ kintamuoju $(x;\ y;\ z)$, taigi $(x;\ y;\ z) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$. Kintamojo $(x;\ y;\ z)$ teiginio funkcija, apibrėžta pagrindinėje aibėje $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$, vadinama tiesine trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistema, kai ji nusakoma formulėmis:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3. \end{cases}$$

Panašiai galima apibrėžti ir n tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą. Eilutės konjunkcija sujungiamos viena su kita. Yra žinoma daugiau tiesinių lygčių sistemų sprendimo metodų. Du svarbiausieji metodai – tai Gauso eliminavimo metodas ir Kramerio taisyklė (žr. 3.10 skyrelį, p. 75).

Gauso eliminavimo metodas

Metodą pirmiausia paaiškinsime spręsdami dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą.

Pavyzdys. $\begin{cases} 5x+7y=-2, \\ x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+7y=-2, \\ -5x+10y=-15. \end{cases}$

Antrosios lygties abi pusės padaugintos iš –5 norint, kad koeficientai prie x abiejose lygtyse būtų vienodo didumo, bet priešingų ženklų.

$$\begin{cases} 5x+7y=-2, \\ 17y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+7y=-2, \\ y=-1. \end{cases}$$

Pirmoji lygtis paliekama nepakeista, antroje eilutėje yra pirmosios ir antrosios lygčių suma. Po šio veiksmo vienas kintamasis antroje eilutėje dingo.

$$\begin{cases} 5x+7\cdot(-1)=-2, \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases} \text{ sprendinių aibė } \{(1;-1)\}.$$

Kai sistemą sudaro trys tiesinės lygtys su trimis nežinomaisiais, tinkamai sudėjus lygtis galima gauti dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą.

Pavyzdys. $\begin{cases} x-y+2z=-5, \\ -2x+y-z=0, \\ 3x+4y+z=7. \end{cases}$

Pirmąją lygtį paliekame nepakeistą, antrąją lygtį padauginame iš 2, trečiąją – iš –2:

$$\begin{cases} x-y+2z=-5, \\ -4x+2y-2z=0, \\ -6x-8y-2z=14. \end{cases}$$

Pridėję pirmąją lygtį prie antrosios ir prie trečiosios lygties gauname sistemą, kurios naujai gautos antroji ir

trečioji lygtis nebeturi kintamojo z. Pirmoji lygtis paliekama nepakeista. Turime tokią sistemą:

$$\begin{cases} x-y+2z=-5, \\ -3x+y=-5, \\ -5x-9y=-19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=-5, \\ -27x+9y=-45, \\ -5x-9y=19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=-5, \\ -27x+9y=-45, \\ -32x=-64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=-5, \\ y=1, \\ x=2. \end{cases}$$

Nežinomąjį z pagaliau randame iš pirmosios lygties:

$$\begin{cases} z=-3, \\ y=1, \\ x=2; \end{cases}$$ sprendinių aibė $\{(2;\ 1;\ -3)\}$.

Yra trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemų, kurios turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdys. $$\begin{cases} x-y-z=-3, \\ x+2y-4z=3, \\ 2x+y-5z=0. \end{cases}$$

Pirmąją lygtį padauginame iš –2, antrąją – iš 2:

$$\begin{cases} -2x+2y+2z=6, \\ 2x+4y-8z=6, \\ 2x+y-5z=0. \end{cases}$$

Pridėjus pirmąją lygtį prie antrosios ir prie trečiosios, eliminuojamas kintamasis x:

$$\begin{cases} -2x+2y+2z=6, \\ 6y-6z=12, \\ 3y-3z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y+2z=6, \\ 3y-3z=6, \\ 3y-3z=6. \end{cases}$$

Kadangi antroji ir trečioji lygtys yra vienodos, iš tikrųjų čia yra dvi lygtys su trimis nežinomaisiais. Tokiu atveju vienas kintamasis (pavyzdžiui, x) parenkamas laisvai:

$$\begin{cases} 2y+2z=6+2x, \\ 3y-3z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=3+x, \\ y-z=2. \end{cases}$$

Pirmoji lygtis paliekama nepakeista, o antroji gaunama sudėjus abi lygtis:

$$\begin{cases} y+z=3+x, \\ 2y=5+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=3+x, \\ y=\frac{5+x}{2}. \end{cases}$$

Ši y išraiška įrašoma į pirmąją lygtį ir gauta lygtis išsprendžiama z atžvilgiu:

$$\begin{cases} \frac{5+x}{2}+z=3+x, \\ y=\frac{5+x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3+x-\frac{5+x}{2}, \\ y=\frac{5+x}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\frac{x+1}{2}, \\ y=\frac{5+x}{2}. \end{cases}$$

Sprendinių aibė $\left\{(x;\ y;\ z),\ x\in \boldsymbol{R} \wedge y=\frac{5+x}{2} \wedge z=\frac{x+1}{2}\right\}$.

Kai sistemą sudaro trys lygtys, bet tik su dviem nežinomaisiais (perteklinė sistema), pirmiausia Gauso eliminavimo metodu išsprendžiama sistema, sudaryta iš pirmųjų dviejų lygčių, po to patikrinama, ar gautasis sprendinys tinka trečiajai lygčiai.

Pavyzdys. $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 4x-y=-4, \\ -2x+3y=7. \end{cases}$

Trečiąją lygtį* paliekame nepakeistą ir išsprendžiame sistemą, sudarytą iš pirmųjų dviejų lygčių. Iš jų eliminuojame nežinomąjį y, tas lygtis sudėdami:

$$\begin{cases} 2x+y=1, \\ 6x=-3, \\ -2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1, \\ x=-\frac{1}{2}, \\ -2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=-\frac{1}{2}, \\ -2x+3y=7. \end{cases}$$

* Vertėjas pateikia parankesnį sprendimo būdą (*redaktoriaus pastaba*).

Gautas x ir y reikšmes įrašome į trečiąją lygtį:

$$\begin{cases} y = 2, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\cdot 2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ 7 = 7 \text{ (teisingas teiginys).} \end{cases}$$

Sprendinių aibė $\left\{\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)\right\}$.

$$\begin{cases} 5x - y = -5, \\ 3x + 2y = 10, \\ 7x - 3y = 1. \end{cases}$$

Pirmąją lygtį padauginame iš 6, antrąją lygtį – iš 3, trečiąją – iš –2. Tada koeficientų prie y moduliai bus vienodi.

$$\begin{cases} 30x - 6y = -30, \\ 9x + 6y = 30, \\ -14x + 6y = -2. \end{cases}$$

Pirmąją lygtį pridedame prie antrosios ir trečiosios lygties:

$$\begin{cases} 30x - 6y = -30, \\ 39x = 0, \\ 16x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 6y = -30, \\ x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

Gautos dvi skirtingos x reikšmės, taigi sistema neturi sprendinių, sprendinių aibė yra $\varnothing$.

Dviejų lygčių su trimis nežinomaisiais sistema turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdys. $\begin{cases} x + 3y + z = -1, \\ -x - 2y + 2z = 3. \end{cases}$

Du kintamieji, pavyzdžiui, x ir y, išreiškiami trečiuoju kintamuoju z, laikant z parametru:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - z, \\ -x - 2y = 3 - 2z. \end{cases}$$

Lygčių sistema išsprendžiama eliminavimo metodu:

$$\begin{cases} x+3y=-1-z, \\ y=2-3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7+8z, \\ y=2-3z. \end{cases}$$

Sprendinių aibė $\{(x; y; z),\ x=-7+8z,\ y=2-3z,\ z\in \boldsymbol{R}\}$.

3.10. Determinantai

Apibrėžimai

Antrosios eilės determinantas užrašomas taip: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Jo reikšmė lygi $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Pagal indeksus galima atrinkti, kurioje schemos vietoje yra skaičius. $a_{11}a_{22}$ yra pagrindinėje įstrižainėje (viršuje iš kairės, apačioje iš dešinės) esančių skaičių sandauga, $a_{12}a_{21}$ yra šalutinėje įstrižainėje (viršuje iš dešinės, apačioje iš kairės) esančių skaičių sandauga.

Pavyzdys: $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 4 - 2\cdot(-1) = -10.$

Trečiosios eilės determinantas užrašomas taip: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Sarijaus taisyklė

Trečiosios eilės determinanto reikšmę galima apskaičiuoti pagal Sarijaus taisyklę: du pirmieji stulpeliai dar kartą parašomi šalia iš dešinės determinanto pusės. Taip gaunamos trys pagrindinės ir trys šalutinės įstrižainės. Apskaičiuojamos kiekvienoje pagrindinėje įstrižainėje esančių skaičių sandaugos ir jos sudedamos. Po to atimamos sandaugos, gautos sudauginus kiekvienoje šalutinėje įstrižainėje esančius skaičius.

Pavyzdys. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Pirmąjį ir antrąjį stulpelį prirašome iš dešinės už trečiojo stulpelio:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 5 \end{matrix}$$

$2\cdot(-4)\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)\cdot 5 - (-1)\cdot(-4)\cdot 0 -$
$- 2\cdot 2\cdot 5 - 3\cdot(-1)\cdot 3 = -30.$

Trečiosios eilės determinantus galima išskleisti antrosios eilės determinantais, kurie vadinami minorais. Viena iš galimybių – išskleisti pirmojo stulpelio skaičiais:

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Minoras M_{ik} gaunamas, išbraukus i-tąją eilutę ir k-tąjį stulpelį. Adjunktas lygus minorui su priskirtu jam ženklu ir yra apibrėžiamas taip: $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$. Adjunkto ženklą galima apibūdinti ir šachmatų lentos taisykle, t. y. ženklai kaitaliojami taip, kaip kaitaliojami juodi ir balti šachmatų lentos laukeliai:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & \ldots \\ - & + & - & + & - & \ldots \end{matrix}$$

Tada trečiosios eilės determinantas išreiškiamas taip:

$$\boxed{\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.}$$

Pavyzdys. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$

Skleidinys pirmojo stulpelio skaičiais:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -51 + 4 + 7 = -40.$$

Skleidinys antrosios eilutės skaičiais:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 50 = -40.$$

Eilutės arba stulpeliai, kurių skaičiais norima išskleisti determinantą, parenkami laisvai. Juos reikia parinkti taip, kad skaičiavimas būtų kuo lengvesnis. Geriausia parinkti tą eilutę arba stulpelį, kuriame daugiausia nulių.

Pavyzdys. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

Tiek pirmasis, tiek ir antrasis determinantas išskleistas trečiojo stulpelio skaičiais.

Determinantų savybės

Determinanto reikšmė nesikeičia sukeitus stulpelį ir eilutę vietomis.

Determinanto reikšmė nesikeičia, jei prie kurios nors determinanto eilutės (stulpelio) elementų pridedami kitos eilutės (stulpelio) elementai, padauginti iš to paties skaičiaus.

Determinanto ženklas pasikeičia, sukeitus dvi gretimas determinanto eilutes (stulpelius) vietomis.

Determinanto reikšmė lygi 0, kai visi vienos eilutės (stulpelio) elementai lygūs 0 arba kai dviejų eilučių (stulpelių) atitinkamieji elementai yra lygūs arba proporcingi. Norint determinantą padauginti iš skaičiaus, reikia iš to skaičiaus padauginti visus kurios nors vienos eilutės (stulpelio) elementus.

Pavyzdžiai: $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 3\cdot 6 = 0;\ \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 0 - 0\cdot 7 = 0;$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 35 & 30 \\ 12 & 14 & 6 \\ 16 & 28 & 12 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 40\cdot 2\cdot 7\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

(Pirmiausia daugikliai iškelti iš determinanto eilučių, po to iš stulpelių. Išskleista trečiosios eilutės elementais.)

$$= 1680\cdot\left(2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) = 1680\cdot(-2+4-1) = 1680.$$

Kramerio taisyklė

Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

atitinka tokie antrosios eilės determinantai:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Sistemos sprendiniai randami pagal formules:

Kramerio taisyklė	$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$

$\Delta \neq 0$: sistema turi vieną sprendinį.

$\Delta = 0$: Kramerio taisyklė netaikytina. Reikia skirti tokius du atvejus:

$\Delta_x = 0 \wedge \Delta_y = 0$: sistema turi be galo daug sprendinių;

$\Delta_x \neq 0 \wedge \Delta_y \neq 0$: sistema neturi sprendinių.

Pavyzdys: $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 5x - 2y = -12; \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -17;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -12 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-12) = 34;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-12) - 1 \cdot 5 = -17;$$

$$\begin{cases} x = \frac{34}{-17}, \\ y = \frac{-17}{-17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

atitinka tokie trečiosios eilės determinantai:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

Kramerio taisyklė: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}.$

Kai $\Delta \neq 0$, sistema turi vieną sprendinį. Kai $\Delta = 0$, sistema arba turi be galo daug sprendinių, arba jų neturi iš viso. Norint tai ištirti, taikomas Gauso eliminavimo metodas.

Pavyzdys: $\begin{cases}2x+3y+z=0,\\ x+y+z=-1,\\ 5x-y+2z=1;\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix}=9$ (Sarijaus taisyklė),

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=9,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix}=0,\ \Delta_z=$$
$$=\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix}=-18;$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{9}{9},\\ y=\dfrac{0}{9},\\ z=-\dfrac{18}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=0,\\ z=-2;\end{cases}$$ sprendinių aibė $\{(1;\ 0;-2)\}$.

Kramerio taisyklė, kai lygčių ir nežinomųjų yra daugiau nei trys, taikoma retai, nes sunku apskaičiuoti determinantus.

3.11. Matricos

Apibrėžimas

$m \times n$ eilės matrica vadinama sutvarkyta realiųjų skaičių lentelė

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik});$$

$$i = 1, \dots, m \text{ ir } k = 1, \dots, n.$$

Matrica turi m eilučių ir n stulpelių. Dvigubas indeksas nurodo vietą, kurioje yra matricos elementas: pirmasis skaitmuo yra eilutės, o antrasis – stulpelio, kurių sankirtoje yra elementas, numeriai. Dvi matricos yra tos pačios eilės, jeigu jos turi atitinkamai po vienodą kiekį eilučių bei stulpelių. Dvi matricos yra lygios, jeigu jos yra tos pačios eilės ir jų atitinkamieji elementai yra lygūs.

Atskirieji atvejai

Kai $m = n$, matrica turi tiek pat eilučių, kiek ir stulpelių, ji vadinama kvadratine.

Kai $m = 1$, matrica turi tik vieną eilutę, ji vadinama matrica eilute.

Kai $n = 1$, matrica turi tik vieną stulpelį, ji vadinama matrica stulpeliu.

Matrica, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinama nuline matrica.

Kvadratinė matrica, kurios visi elementai, išskyrus pagrindinės įstrižainės elementus, lygūs nuliui, vadinama diagonaliąja matrica.

Diagonalioji matrica, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai lygūs 1, vadinama vienetine matrica.

Matricų operacijos

Tarkime, nurodytos dvi tos pačios eilės matricos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Šių dviejų matricų *suma* vadinama matrica S:

$$S = A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Šių dviejų matricų *skirtumas* yra matrica D:

$$D = A-B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1{,}5 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2{,}5 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$A-B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Realiojo skaičiaus α ir matricos A *sandauga* vadinama matrica C:

$$C = \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = 5$, $\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & -5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$.

Adicinė matricų Abelio grupė

Tarkime, kad M – visų $m \times n$ matricų aibė. Sudėjus du aibės M elementus vėl gaunamas aibės M elementas. Todėl matricų sudėtis yra operacija aibėje M. Jos pagrindinės savybės tokios:

P: $A, B \in M \to A+B = B+A$ (perstatomumas);

J: $A, B, C \in M \to (A+B)+C = A+(B+C)$ (jungiamumas);

N: $A \in M \to A+O = O+A$ (neutralusis elementas).

O yra nulinė matrica.

A: Kiekvieną matricą $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ atitinka priešingoji

matrica
$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$
ir tokia, kad $A \in M \rightarrow A+(-A)=(-A)+A=0$ (priešingasis elementas).

Matricų daugyba

Matricas galima sudėti tik tada, kai jos yra tos pačios eilės. Norint matricas sudauginti, jos nebūtinai turi būti vienodos eilės. Matricas galima sudauginti, kai pirmoji jų turi tiek stulpelių, kiek antroji turi eilučių.

Tarkime, nurodyta $m \times n$ matrica $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

ir $n \times p$ matrica $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$.

A turi n stulpelių, B turi n eilučių.

Matricų A ir B sandauga vadinama $m \times p$ matrica $A \cdot B$:
$$A \cdot B=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix},$$
jos elementai c_{ik} apskaičiuojami pagal formules:
$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1},$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2},$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1},$$
....
$$c_{mp}=a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\dots+a_{mn}b_{np}.$$

Pavyzdžiui, elementas c_{12} lygus matricos A 1-osios eilutės ir matricos B 2-ojo stulpelio atitinkamųjų elementų sandaugų sumai.

Pavyzdys: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 6 \\ 4 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = 4,$$
$$c_{12} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 20,$$
$$c_{13} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 6,$$
$$c_{21} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 4,$$
$$c_{22} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 11,$$
$$c_{23} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2.$$

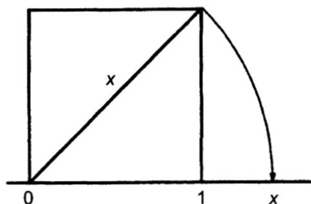
Lygčių sistemos, pavyzdžiui, 3×3 sistemos $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ kairiąją pusę galima išreikšti matricos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ir matricos stulpelio $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sandauga.

3.12. Realieji skaičiai

Iracionalieji skaičiai

Kiekvieną racionalųjį skaičių atitinka skaičių tiesės taškas. Kyla klausimas, ar kiekvieną skaičių tiesės tašką atitinka tam tikras racionalusis skaičius, t. y. ar skaičių tiesėje nėra skylių. Galima paprastu pavyzdžiu iliustruoti, kad skaičių tiesėje yra bent vienas taškas, kurio neatitinka joks racionalusis skaičius.

Skaičių tiesėje atidedame atkarpą, kurios ilgis 1, ir laikydami ją kvadrato kraštine nubrėžiame kvadratą. Pažymėję šio kvadrato įstrižainės ilgį x ir pritaikę Pitagoro teoremą, gauname:



$x^2 = 1^2 + 1^2$ arba $x^2 = 2$.

Atkarpą x galima atidėti skaičių tiesėje. Tačiau nėra racionaliojo skaičiaus, kuris tenkintų sąlygą $x^2 = 2$. Panašiai galima būtų parodyti, kad be šios „skylės“ skaičių tiesėje dar yra be galo daug kitų skylių.

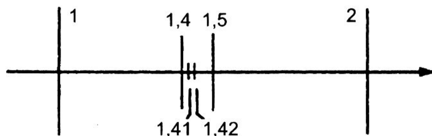
Įdėtieji intervalai

Kadangi nėra racionaliojo skaičiaus, atitinkančio skaičių tiesės skylę x, pabandykime žingsnis po žingsnio priartėti prie taško x, pasitelkdami racionaliuosius skaičius.

Racionaliųjų skaičių $a_1 = 1$, $a_2 = 1,4$, $a_3 = 1,41$, $a_4 = 1,414$, ... kvadratai yra $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = 1,96$, $a_3^2 = 1,9881$, $a_4^2 = 1,999396$, ...

Šie kvadratai artėja prie skaičiaus 2. Tačiau racionaliųjų skaičių $b_1 = 2$, $b_2 = 1,5$, $b_3 = 1,42$, $b_4 = 1,415$ kvadratai $b_1^2 = 4$, $b_2^2 = 2,25$, $b_3^2 = 2,0164$, $b_4^2 = 2,002225$ irgi artėja prie skaičiaus 2. Kadangi intervalai $[a_1^2; b_1^2]$, $[a_2^2; b_2^2]$, $[a_3^2; b_3^2]$, ... yra „įdėti vienas į kitą“ ir jie „apsupa“ skaičių 2, tai galima manyti, kad ir intervalai $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, $[a_3; b_3]$, ... yra „įdėti vienas į kitą“ ir jie „apsupa“ skaičių x. Taigi skaičius x egzistuoja, bet nepriklauso racionaliųjų skaičių aibei. Jis vadinamas iracionaliuoju skaičiumi. Įdėtųjų intervalų sistemą galima pateikti lentele:

Intervalo ilgis	Intervalas	Kontrolinis intervalas
1	[1; 2]	[1; 4]
0,1	[1,4; 1,5]	[1,96; 2,25]
0,01	[1,41; 1,42]	[1,9881; 2,0164]
0,001	[1,414; 1,415]	[1,999396; 2,002225]
...	...	...



Bendruoju atveju tokiems įdėtiesiems intervalams teisingi teiginiai:
1) kairieji intervalų galai sudaro monotoniškai didėjančią seką;
2) dešinieji intervalų galai sudaro monotoniškai mažėjančią seką;
3) intervalų ilgiai artėja prie 0.

Panašiai, taikydami įdėtuosius intervalus, galėtume apibrėžti ir kitus iracionaliuosius skaičius. Racionaliuosius skaičius taip pat galima apibūdinti pasitelkus įdėtuosius intervalus.

Realiųjų skaičių kūnas

Skaičius, kuris yra racionalusis arba iracionalusis, vadinamas realiuoju skaičiumi. Realiųjų skaičių aibė žymima simboliu $\boldsymbol{R}$. Realiuosius skaičius galima sudėti, atimti, dauginti ir dalyti (išskyrus dalybą iš 0). Šių veiksmų rezultatas visada yra realusis skaičius.

Pagrindinės realiųjų skaičių sudėties ir daugybos savybės yra šios.

P: $a, b \in \boldsymbol{R} \Rightarrow a+b=b+a, \ a\cdot b=b\cdot a.$

J: $a, b, c \in \boldsymbol{R} \Rightarrow a+(b+c)=(a+b)+c, \ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$

N: $a \in \boldsymbol{R} \Rightarrow a+0=0+a=a, \ a\cdot 1=1\cdot a=a.$

A: $a \in \boldsymbol{R} \Rightarrow a+(-a)=(-a)+a=0,$

$a \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\} \Rightarrow a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1.$

S: $a, b, c \in \boldsymbol{R} \Rightarrow a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$

Struktūra ($\boldsymbol{R}$, +, ·), kuriai būdingos išvardytos savybės, vadinama kūnu. Taigi realieji skaičiai sudaro kūną.

Tvarka

Realiųjų skaičių vaizdavimas skaičių tiesės taškais kartu apibūdina jų tvarką. Kai taškas a skaičių tiesėje yra į kairę nuo b, sakoma, kad a yra mažesnis už b ir rašoma $a < b$. Iš tvarkos savybių išplaukia monotoniškumo dėsnis, taikomas pertvarkant lygtis ir nelygybes.

$$a, b, c \in \boldsymbol{R} \wedge a<b \Rightarrow a+c<b+c;$$
$$a\cdot c<b\cdot c, \text{ kai } c>0;$$
$$a\cdot c>b\cdot c, \text{ kai } c<0.$$

Realiojo skaičiaus modulis

Teigiamojo realiojo skaičiaus modulis yra pats skaičius. Nulio modulis yra 0, neigiamojo realiojo skaičiaus modulis yra jam priešingas jau teigiamasis skaičius. Trumpai tai užrašoma taip:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a > 0, \\ 0, & \text{kai } a = 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{cases}$$

Įsidėmėkite: kai $a < 0$, tai $-a > 0$.

Pavyzdžiai: $|20+25| = 45$; $|20-25| = -(-5) = 5$; $|20-20| = 0$.

Realiųjų skaičių aibės pilnumas

Tarkime, kad A yra aibės $\boldsymbol{R}$ poaibis. Poaibis A vadinamas aprėžtuoju, kai yra du skaičiai s, $S \in \boldsymbol{R}$, su kuriais $x \in A \Rightarrow s \le x \le S$. Skaičius s yra apatinis aibės A rėžis, skaičius S – viršutinis rėžis. Kiekvienas aprėžtasis aibės $\boldsymbol{R}$ poaibis turi be galo daug apatinių ir viršutinių rėžių.

Pilnumo aksioma

Kiekviena iš viršaus aprėžta netuščia realiųjų skaičių aibė turi mažiausią viršutinį rėžį.

Iš šio teiginio išplaukia, kad kiekviena iš apačios aprėžta netuščia realiųjų skaičių aibė turi didžiausią apatinį rėžį. Kai A yra aprėžtoji netuščia realiųjų skaičių aibė, jos mažiausias viršutinis rėžis žymimas simboliu $\sup(A)$ (skaitoma: supremumas A), o didžiausias apatinis rėžis – simboliu $\inf(A)$ (skaitoma: infimumas A). Tiek supremumas, tiek infimumas gali aibei priklausyti, bet gali ir nepriklausyti.

Pavyzdžiai. Aibė $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ yra aprėžtoji: $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset \boldsymbol{R}$ nėra aprėžtoji: $\inf(\boldsymbol{N}) = 0$, $\sup(\boldsymbol{N})$ neegzistuoja.

Realiųjų skaičių aibė $\boldsymbol{R}$ nėra aprėžtoji.

Iš pilnumo aksiomos galima gauti tokią savybę, kuri vadinama Archimedo savybe.

Archimedo savybė

Kad ir kokie būtų $a, b \in \boldsymbol{R}$, tenkinantys sąlygą $0 < a < b$, visada yra $n \in \boldsymbol{N}$, su kuriuo teisinga nelygybė $n \cdot a > b$.

Įrašius $a = 1$, iš Archimedo savybės gaunama, kad už kiekvieną realųjį skaičių yra didesnis natūralusis skaičius (išskyrus 0) ($n > b$) ir su visais $b > 0$ visada $\frac{1}{n} < \frac{1}{b}$.

Ribiniai (sankaupos) taškai

Tarkime, nurodytas realusis skaičius x. Kiekvienas atvirasis intervalas, kuriam priklauso x, vadinamas x aplinka, trumpai $U(x)$.

Tarkime, nurodyta realiųjų skaičių aibė A. Skaičius $x_0 \in \boldsymbol{R}$ vadinamas aibės A ribiniu tašku, kai kiekvienoje taško x_0 aplinkoje yra bent vienas nesutampantis su x_0 aibės A elementas.

Pavyzdžiai. $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$. Skaičius 0 yra A ribinis taškas, nes esama be galo daug taško 0 aplinkų, kuriose yra bent vienas A elementas.
$A = [0; 2)$. Kiekvienas aibės A taškas yra jos ribinis taškas, be to, ir taškas 2 yra ribinis A taškas. Kiekvienas realusis skaičius yra ribinis $\boldsymbol{R}$ taškas.

Kaip matyti iš pavyzdžių, ribinis taškas gali aibei priklausyti, bet gali ir nepriklausyti. Elementas $a \in A$ vadinamas izoliuotuoju aibės A tašku, kai jis nėra ribinis A taškas, t. y. kai egzistuoja aplinka $U(a)$, kurioje išskyrus a nėra nė vieno aibės A elemento. Izoliuotieji aibės taškai turi priklausyti aibei.

Pavyzdžiai. $A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ sudaryta tik iš izoliuotųjų taškų.
$\boldsymbol{N}$ ir $\boldsymbol{Z}$ sudaro izoliuotieji taškai.
$\boldsymbol{R}$ neturi izoliuotųjų taškų.

3.13. Kvadratinės šaknys

Apibrėžimas

Tarkime, nurodytas skaičius $a \in \boldsymbol{R}_0^+$. Kvadratine šaknimi iš skaičiaus a vadinamas skaičius $b \in \boldsymbol{R}_0^+$, kurio kvadratas lygus a. Simboliais rašoma:

$$\boxed{\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2.}$$

Pavyzdžiai: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{625} = 25$; $\sqrt{0} = 0$;
$\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$; $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$;
$\sqrt{a^4} = a^2$; $\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = x^2 + y^2$.

Iš apibrėžimo išplaukia tokios šaknų skaičiavimo taisyklės.

1. $\sqrt{a} \geq 0$ su visais $a \in \boldsymbol{R}_0^+$.
2. $\sqrt{x^2} = |x|$ su visais $x \in \boldsymbol{R}$.
3. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ su visais $a \in \boldsymbol{R}_0^+$.
4. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ su visais a, $b \in \boldsymbol{R}_0^+$.
5. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ su visais $a \in \boldsymbol{R}_0^+$ ir $b \in \boldsymbol{R}^+$.

Veiksmai su kvadratinėmis šaknimis

Sudėtis ir atimtis

Sudėti ir atimti galima tik panašias šaknis.

Pavyzdys: $m\sqrt{a} - n\sqrt{a} + 3m\sqrt{a} + 4n\sqrt{a} =$
$= (4m + 3n)\sqrt{a}.$

Daugyba ir dalyba

Išskaidžius pošaknį daugikliais ir ištraukus iš vieno jų šaknį, reiškinį galima pakeisti paprastesniu.

Pavyzdžiai: $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$;

$\sqrt{x \cdot y} \cdot \sqrt{2x} = \sqrt{2x^2 y} = x\sqrt{2y}, \ x > 0$;

$\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$;

$\sqrt{a^7 b^9} = \sqrt{a^6 b^8 \cdot ab} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{b^8} \cdot \sqrt{ab} = |a^3| \cdot b^4 \cdot \sqrt{ab}$;

$$\sqrt{\frac{1225}{81}} = \frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{81}} = \frac{35}{9};$$

$$\sqrt{\frac{a^3 b^2}{c^5}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 \cdot a}{c^4 \cdot c}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{c^4}} \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{|ab|}{c^2} \cdot \sqrt{\frac{a}{c}};$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}} = \frac{|x+1|}{x^2+1}.$$

Iracionalumo naikinimas trupmenos vardiklyje

Jeigu skaičiuojant imamos apytikslės iracionaliųjų skaičių reikšmės, dalijant iš iracionaliojo skaičiaus gali būti gaunamos gana didelės paklaidos. Kai trupmenos vardiklis yra iracionalusis skaičius, tikslinga trupmeną pakeisti taip, kad jos vardiklis būtų racionalusis skaičius.

Pavyzdžiai: $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

$$\frac{a}{5\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{25};$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \sqrt{3} - 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right).$$

3.14. Laipsniai

Laipsniai su natūraliaisiais rodikliais

Padauginus skaičių a patį iš savęs, gaunamas skaičius a^2, kuris vadinamas skaičiaus a kvadratu arba antruoju laipsniu. Skaičius a yra laipsnio pagrindas, skaičius 2 – laipsnio rodiklis. Panašiai apibrėžiama $a \cdot a \cdot a = a^3$, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ ir t. t.

$$a \in \boldsymbol{R} \wedge n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kartų}} = a^n.$$

Laipsnio a^n pagrindas yra realusis skaičius a, rodiklis – natūralusis skaičius n.

Pavyzdžiai: $5^1 = 5$;

$-1^6 = -1$, bet $(-1)^6 = 1$;

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$;

$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10000} = 0,0001$;

$0,1^5 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,00001$;

$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$;

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$;

$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$;

$8 \cdot (-2) \cdot 8 \cdot (-2) \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 \cdot (-2)^2 = 16\,384$;

$0^7 = 0$;

$\left(\sqrt{7}\right)^3 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$.

Veiksmams su laipsniais, kurių rodikliai yra natūralieji skaičiai, būdingos tokios savybės:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m > n;$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Sudėti ir atimti galima tik panašius laipsnius.

Pavyzdžiai: $2^3 + 2^4 - 2^5 = 2^3(1+2-4) = -2^3 = -8;$

$2x^3 + x^2 + 4x^3 - 2x^2 = 6x^3 - x^2;$

$0,5^3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^7 = 0,5^{3+2+7} = 0,5^{12};$

$\frac{x^5 \cdot x^2}{x^4} = x^{5+2-4} = x^3;$

$\left(\frac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right)^3 = \left(\frac{a \cdot b^2}{b^2 \cdot a}\right)^3 = 1;$

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729};$

$32^3 = (2^5)^3 = 2^{5\cdot 3} = 2^{15}.$

Bet kurio laipsnio šaknis

n-tojo laipsnio šaknis iš neneigiamojo skaičiaus a yra neneigiamasis skaičius b, kurio n-tasis laipsnis lygus a. Skaičius a vadinamas pošakniu, n – šaknies laipsnio rodikliu ($n > 1$).

Apibrėžimas: $a \in \boldsymbol{R}_0^+ \wedge n \in \boldsymbol{N} \rightarrow \left(\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n\right).$

Savybės: $\sqrt[n]{a} \geq 0$ su visais $a \in \boldsymbol{R}_0^+$;

$\sqrt[n]{a^n} = a$ su visais $a \in \boldsymbol{R}_0^+$;

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$;

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a};$$

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m},\ m\geq 1;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\ m\geq 1.$$

Sudėtis ir atimtis

Pavyzdžiai: $\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[6]{25}=3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}=4\sqrt[3]{5};$

$$a\sqrt[3]{x}-b\sqrt[3]{x}+c\sqrt[9]{x^3}=(a-b+c)\sqrt[3]{x};$$

$$\sqrt[3]{a^6b^5}+3\sqrt[3]{a^9b^8}-4\sqrt[3]{b^2}=a^2b\sqrt[3]{b^2}+$$
$$+3a^3b^2\sqrt[3]{b^2}-4\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[3]{b^2}\left(2a^2b+3a^3b^2-4\right).$$

Daugyba ir dalyba

Pavyzdžiai: $\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{125\cdot 5}=\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5};$

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3};$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2;$$

$$\frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{3^3}}=\sqrt[6]{\frac{12}{3^3}}=\sqrt[6]{\frac{12}{27}};$$

$$\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{y^7}=\sqrt[6]{x^6\cdot x}+\sqrt[6]{y^6\cdot y}=x\sqrt[6]{x}+y\sqrt[6]{y}.$$

Šaknų kėlimas laipsniu

Pavyzdžiai: $\left(\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt{b^3}\sqrt[4]{c}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{c^3}}\right)^{12}=\frac{a^4\cdot b^{18}\cdot c^3}{a^6\cdot b^4\cdot c^9}=\frac{b^{14}}{a^2\cdot c^6};$

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{10}}}=\frac{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{5}}=\frac{\sqrt[24]{2^4}\cdot\sqrt[8]{5^2}}{\sqrt[24]{2^3}\cdot\sqrt[8]{5}}=$$
$$=\sqrt[24]{\frac{2^4}{2^3}}\cdot\sqrt[8]{\frac{5^2}{5}}=\sqrt[24]{2}\cdot\sqrt[8]{5}.$$

Laipsniai su sveikaisiais rodikliais

Naudojantis taisykle $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$ (ji teisinga ir tada, kai $m \leq n$), galima apibrėžti laipsnius su sveikaisiais rodikliais.

Apibrėžimas: $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \wedge n \in \boldsymbol{N} \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ir $a^0 = 1$.

Pavyzdžiai: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^2} = \frac{1}{36}$;

$$\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}}\right)^{-6} = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{6} = \frac{6^3}{2^2} = 54; \quad \left(\frac{a^2}{x^3y^4}\right)^0 = 1.$$

Laipsnis 0^0 nėra apibrėžtas.

Veiksmų taisyklės, taikomos laipsniams su natūraliaisiais rodikliais, tinka ir laipsniams su sveikaisiais rodikliais.

Sudėtis ir atimtis

Pavyzdžiai: $0{,}4 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} + 1{,}6 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3}$;

$$-2e^{-5} - 6e^{-5} + e^{-5} = -7e^{-5};$$

$$(1-x)^{n-1} - x(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}(1-x) = (1-x)^n.$$

Daugyba ir dalyba

Pavyzdžiai: $x^{-2} \cdot x^{-3} \cdot x^4 = x^{-2-3+4} = \frac{1}{x}$;

$$\frac{x^{2n+1}}{x^{-n-1}} = x^{2n+1-(-n-1)} = x^{3n+2};$$

$$\frac{10x^2y^{-1}z^3}{30x^3y^{-3}z^{-2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{y^{-1}}{y^{-3}} \cdot \frac{z^3}{z^{-2}} = \frac{1}{3x} \cdot y^{-1+3} \cdot z^{3+2} =$$

$$= \frac{1}{3x} \cdot y^2 \cdot z^5.$$

Laipsnių kėlimas laipsniu

Pavyzdžiai: $\left((-0{,}5)^{-1}\right)^2 = (-0{,}5)^{-2} = \frac{1}{(-0{,}5)^2} = \frac{1}{0{,}25} = 4$;

$$\left(a^2b^{-3}\right)^2 = a^4b^{-6} = \frac{a^4}{b^6};$$

$$\left(c^{-1}d^{-5}\right)^{-2} = c^2d^{10}.$$

Laipsniai su racionaliaisiais rodikliais

Apibrėžimas:

$$a \in \boldsymbol{R}^+,\ m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N} \rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$a \in \boldsymbol{R}^+,\ m \in \boldsymbol{N},\ n \in \boldsymbol{N} \rightarrow 0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = 0.$$

Kai $m = 1$, rašoma: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ ir t. t. Veiksmų taisyklės, taikomos laipsniams su natūraliaisiais rodikliais, tinka ir laipsniams su racionaliasiais rodikliais.

Pavyzdžiai: $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = \sqrt{729} = 27;$

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 \cdot 2 = 18;$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25;$$

$$\frac{1}{\sqrt[10]{2^8}} = 2^{-\frac{8}{10}} = 2^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^4}}.$$

Veiksmai su laipsniais,
kurių rodikliai yra racionalieji skaičiai

Pavyzdžiai: $\left(u^6v^4\right)^{\frac{3}{4}} = u^{\frac{18}{4}} \cdot v^3 = u^{\frac{9}{2}} \cdot v^3 = u^4 \cdot \sqrt{u} \cdot v^3;$

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2;$$

$$\frac{x^{1,6} \cdot \sqrt[3]{x}}{x} = x^{\frac{8}{5}+\frac{1}{3}-1} = x^{\frac{24+5-15}{15}} = x^{\frac{14}{15}} = \sqrt[15]{x^{14}};$$

$$\left(\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{0,75}\right)^{0,8} = a^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}} = a^{-\frac{12}{40}} = a^{-\frac{3}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{a^3}};$$

$$\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot x^2} = \sqrt[4]{x\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^2} = \sqrt[4]{x^{\frac{3+1+6}{3}}} =$$
$$= \sqrt[4]{x^{\frac{10}{3}}} = \sqrt[12]{x^{10}} = \sqrt[6]{x^5}.$$

Laipsnius su realiaisiais rodikliais galima apibrėžti pasitelkus įdėtuosius intervalus ir veiksmų su laipsniais taisykles.

Laipsninės lygtys

Laipsnine vadinama lygtis, kurią galima užrašyti taip: $x^{\frac{m}{n}} = a \ (m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N},\ a \in \boldsymbol{R})$.

Lygtis $x^{\frac{m}{n}} = a$ sprendžiama pirmiausia pakėlus abi jos puses n-tuoju laipsniu, po to ištraukus m-tojo laipsnio šaknį. Kai laipsnio rodiklis nėra sveikasis skaičius, lygtis neapibrėžta aibėje $\boldsymbol{R}^-$.

Pavyzdžiai: $\sqrt[5]{x^2} = 2 \Rightarrow x^{\frac{2}{5}} = 2 \Rightarrow x^2 = 2^5 \Rightarrow x = \sqrt{32}$,
$x = -\sqrt{32}$ nėra sprendinys;
$\sqrt[6]{x^5} = 10^{-5} \Rightarrow x^{\frac{5}{6}} = 10^{-5} \Rightarrow x^5 = 10^{-30} \Rightarrow x = 10^{-6}$.

Atskirieji atvejai. Lygtis $x^m = a$ yra atskirasis prieš tai nagrinėtos lygties atvejis. Kai $m \in N$ yra lyginis skaičius, sprendinių skaičius priklauso nuo a. Kai $a > 0$, yra du sprendiniai, kai $a = 0$ – vienas sprendinys, kai $a < 0$ – nė vieno. Jeigu $m \in N$ yra nelyginis skaičius, lygtis visada turi tik vieną sprendinį.

Pavyzdžiai: $x^4 = 625 \Rightarrow x = -\sqrt[4]{625} \vee x = +\sqrt[4]{625} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$;
$x^3 = 216 \Rightarrow x = \sqrt[3]{216} \Rightarrow x = 6$;
$x^7 = -128 \Rightarrow x = \sqrt[7]{-128} \Rightarrow x = -\sqrt[7]{|128|} \Rightarrow x = -2$.

Lygtį $x^{-m} = b$ galima pakeisti lygtimi $x^m = a$: $\frac{1}{x^m} = b \Leftrightarrow x^m = \frac{1}{b}$.

Telieka $\frac{1}{b}$ pažymėti raide a.

Pavyzdys: $x^{-3} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 8 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

3.15. Rodiklinės lygtys

Apibrėžimas

Rodiklinėmis lygtimis vadinamos lygtys, kurių nežinomasis yra laipsnio rodiklyje.

Paprasčiausia rodiklinė lygtis yra $a^x = b$ (a ir b yra teigiamieji realieji skaičiai, be to, $a \neq 1$).

Bandymas

Daug rodiklinių lygčių galima išspręsti pabandant, ypač tada, kai skaičius b yra skaičiaus a laipsnis.

Pavyzdžiai: $5^x = 15\,625$, bandydami randame, kad $x = 6$;

$0{,}2^x = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{125}$,

bandydami randame, kad $x = 3$.

Laipsnio rodiklių sulyginimas

Kai abiejose lygties pusėse pavyksta suvienodinti pagrindus, lygtis išsprendžiama sulyginant laipsnio rodiklius.

Pavyzdžiai: $3^x = 81^{1,5} \Leftrightarrow 3^x = \left(3^4\right)^{1,5} \Leftrightarrow 3^x = 3^6 \Rightarrow x = 6$;

$2^{2x-2} = 4^{3x-9} \Leftrightarrow 2^{2x-2} = \left(2^2\right)^{3x-9} \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^{6x-18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 2 = 6x - 18 \Leftrightarrow x = 4$.

Keitiniai

Kai kurias rodiklines lygtis galima išspręsti įvedus naują kintamąjį.

Pavyzdys. $5 \cdot 5^{2x} - 126 \cdot 5^x + 25 = 0$.

Pažymėję $5^x = z$, z atžvilgiu gauname kvadratinę lygtį:

$$5z^2 - 126z + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{126 \pm \sqrt{15876 - 500}}{10} \Leftrightarrow z = \frac{126 \pm 124}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 25 \vee z = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 = 5^x \vee \frac{1}{5} = 5^x \Rightarrow x = 2 \vee x = -1.$$

Rodiklines lygtis, pavyzdžiui, $10^x = 41$, $3,5^x = 90$ galima išspręsti logaritmuojant.

3.16. Logaritmai

Apibrėžimas

Tarkime, nurodyta rodiklinė lygtis $a^x = b$ (a ir b yra teigiamieji realieji skaičiai, be to, $a \neq 1$). Taigi x yra toks realusis skaičius, kuriuo pakėlus pagrindą a gaunamas skaičius b. Simboliais tai užrašoma panaudojant logaritmo ženklą.

Logaritmas: $a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b,\ a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \boldsymbol{R}^+$.

Pavyzdys: $12^x = 356 \Leftrightarrow x = \log_{12} 356$.

Logaritmai gali turėti be galo daug skirtingų pagrindų. Praktikoje dažniausiai vartojami logaritmai, kurių pagrindas 10 (dešimtainiai logaritmai, žymimi lg), kurių pagrindas e (natūralieji logaritmai, žymimi ln) ir kurių pagrindas 2 (dvejetainiai logaritmai, žymimi lb* arba ld*). Logaritmo pagrindas keičiamas taikant nesudėtingą formulę.

Logaritmo pagrindo keitimo formulė: $\log_a u = \dfrac{\log_b u}{\log_b a}$.

Pavyzdys: $\log_7 24 = \dfrac{\lg 24}{\lg 7}$.

---

* Mūsų matematinėje literatūroje šie žymėjimai nevartojami (*vertėjo pastaba*).

Su skaičiuotuvu apskaičiuojami logaritmai, kurių pagrindas 10 ir e. Technikos reikmėms skirtuose skaičiavimuose vartojami logaritmai, kurių pagrindas 2.

Pavyzdžiai: lg 56 = 1,7481;
lg 0,089 = –1,0506;
ln 56 = 4,0253;
ln 0,089 = –2,4191.

Rodiklinių lygčių sprendimas

Taikant logaritmus galima išspręsti visas rodiklines lygtis.

Pavyzdžiai. Rodiklinė lygtis, kai pagrindas yra 10:

$10^x = 0,651 \Leftrightarrow x = \lg 0,651 \Rightarrow x = -0,1864.$

Rodiklinė lygtis, kai pagrindas yra e:

$e^{-2x} = 34 \Leftrightarrow -2x = \ln 34 \Rightarrow -2x = 3,5263 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1,7632.$

Rodiklinė lygtis, kai pagrindas yra 8,5:

$8,5^x = 121 \Leftrightarrow x = \log_{8,5} 121.$

Pakeitę logaritmo pagrindą 8,5 į 10, su skaičiuotuvu nesunkiai apskaičiuojame logaritmus:

$$x = \log_{8,5} 121 = \frac{\lg 121}{\lg 8,5} = \frac{2,0828}{0,9294} = 2,2410.$$

Veiksmų taisyklės

Sandaugos logaritmas lygus daugiklių logaritmų sumai. Dalmens logaritmas lygus dalinio ir daliklio logaritmų skirtumui. Laipsnio logaritmas lygus rodiklio ir laipsnio pagrindo logaritmo sandaugai:

$$u, v \in \boldsymbol{R}^+ \Rightarrow \log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v;$$

$$u, v \in \boldsymbol{R}^+ \Rightarrow \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v;$$

$$u \in \boldsymbol{R}^+,\ v \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \log_a u^v = v \cdot \log_a u.$$

Be to, $\log_a 1 = 0$ ir $\log_a a = 1$.

Pavyzdžiai. Išlogaritmuokime:

$$\log_a x(x-2) = \log_a x + \log_a (x-2);$$
$$\log_a (c^2 - d^2) = \log_a (c-d)(c+d) =$$
$$= \log_a (c-d) + \log_a (c+d);$$
$$\log_a \frac{m+n}{mn} = \log_a (m+n) - \log_a m - \log_a n;$$
$$\log_a (p+q)^3 = 3 \cdot \log_a (p+q);$$
$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x;$$
$$\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x.$$

Antilogaritmuokime:

$$\frac{1}{2}\log_a x^3 - \log_a x + 3\log_a x = \log_a \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^3}{x} =$$
$$= \log_a x^{\frac{7}{2}} = \log_a \sqrt{x^7};$$
$$\log_a 1 - 4\log_a a^2 + 2\log_a b = \log_a \frac{1 \cdot b^2}{a^{4 \cdot 2}} = \log_a \frac{b^2}{a^8};$$
$$m\log_a u + \frac{n}{3}\log_a v - \frac{m}{n}\log_a z =$$
$$= \log_a u^m + \log_a v^{\frac{n}{3}} - \log_a z^{\frac{m}{n}} =$$
$$= \log_a \frac{u^m \cdot v^{\frac{n}{3}}}{z^{\frac{m}{n}}} = \log_a \frac{u^m \cdot \sqrt[3]{v^n}}{\sqrt[n]{z^m}}.$$

3.17. Logaritminės lygtys

Apibrėžimas

Lygtys, kurių nežinomieji yra po logaritmo ženklu, vadinamos logaritminėmis lygtimis.

Paprasčiausia logaritminė lygtis yra tokia: $\log_a x = b$; čia $x \in \boldsymbol{R}^+$ ir $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$. Ši lygtis išsprendžiama pakeičiant ją ekvivalenčia išraiška $x = a^b$ arba palyginant logaritmus.

Logaritmo apibrėžimo tiesioginis taikymas

Pavyzdžiai: $\lg x = 2{,}567,\ D = \boldsymbol{R}^+,$

$x = 10^{2{,}567} \Rightarrow x \approx 368{,}98;$

$\log_3(x-2) = 4{,}76,\ D = (2;\ +\infty),$

$x - 2 = 3^{4{,}76} \Leftrightarrow x - 2 = 186{,}68 \Leftrightarrow x = 188{,}68.$

Logaritmų sulyginimas

Pavyzdys. $\log_3(x+4) + \log_3(x-3) - \log_3(3x-8) = 1,\ D = (3;\ +\infty).$

Įrašę $1 = \log_3 3$ ir antilogaritmavę, gauname:

$$\log_3 \frac{(x+4)(x-3)}{3x-8} = \log_3 3.$$

Kadangi logaritmai lygūs, turi būti lygūs ir logaritmuojami reiškiniai. Sulyginę turime:

$$\frac{(x+4)(x-3)}{3x-8} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 3(3x-8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4x - 12 = 9x - 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 2.$$

Kadangi $2 \notin D$, lygtis turi tik vieną sprendinį $x = 6$.

3.18. Matematinė (pilnoji) indukcija

Indukcija ir dedukcija

Sakoma, kad teiginys gautas indukcijos metodu, jeigu jis gautas apibendrinus atskirus teiginius, ir kad teiginys gautas dedukcijos metodu, jeigu jis gautas iš bendrojo teiginio kaip jo atskirasis atvejis.

Dedukcijos metodu iš teisingo teiginio gauta išvada visada yra teisinga. Priešingai, indukcijos metodu iš teisingų atskirų teiginių gauta išvada gali būti ir klaidinga. Pavyzdžiui, indukcijos būdu gautas teigi-

nys: „Jeigu tris sekmadienius paeiliui lyja, tai ir kiekvieną sekmadienį lis“ yra klaidingas.

Tam tikrą natūraliųjų skaičių aibės N elementą pažymėkime n_0, bet kuriuos kitus jos elementus – n. Simboliu $A(n_0)$ pažymėkime teiginį, būdingą n_0, simboliu $A(n)$ – teiginio funkciją, apibrėžtą aibėje N.

Implikacija $A(n_0) \Rightarrow A(n)$ vadinama indukcija.
Implikacija $A(n) \Rightarrow A(n_0)$ vadinama dedukcija.

Pavyzdžiai. *Indukcija*:

$2 \cdot 5 + 1$ yra nelyginis skaičius, taigi $2 \cdot n + 1$ irgi yra nelyginis skaičius.

Dedukcija:

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+...+100=\frac{100\cdot 101}{2}.$$

Kai teiginio funkcijos $A(n)$ sprendinių aibė yra lygi apibrėžimo aibei N, tai dedukcijos metodu $A(n) \Rightarrow A(n_0)$ gaunamas teisingas teiginys $A(n_0)$. Atvirkščiai, negalime būti tikri, kad indukcijos metodu $A(n_0) \Rightarrow A(n)$ gaunamos teiginio funkcijos $A(n)$ sprendinių aibė sutaps su N.

Pavyzdžiai. Teiginio funkcijos $A(n):(n+1)^2=n^2+2n+1$ sprendinių aibė yra N.

Dedukcijos metodu gaunamas teisingas teiginys $A(5)$: $(5+1)^2=5^2+2\cdot 5+1$.

Iš teisingo teiginio $A(2)$: $2<2+1$ indukcijos metodu gaunama teiginio funkcija $A(n)$: $n<n+1$, kurios sprendinių aibė N.

Šie teiginiai yra teisingi:

$A(1)$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$;

$A(2)$: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{2+1}$;

$A(3)$: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{3+1}$.

Galima spėti, jog iš šios teiginių sekos indukcijos metodu gautos teiginio funkcijos

$A(n)$: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ sprendinių aibė bus N.

Pavyzdys verčia susimąstyti, kaip galima būtų patikrinti, jog indukcijos metodu gautos teiginio funkcijos $A(n)$ sprendinių aibė yra aibė *N*, kitaip sakant, jog teiginio funkcija teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais. Įrašę vietoj n natūraliuosius skaičius 1, 2, 3, ..., gauname teiginius $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, ..., kurių teisingumą galima ištirti. Praktiškai galima ištirti tik baigtinio kiekio teiginių teisingumą. Netgi patikrinę labai daug teiginių ne visada galime būti tikri, jog visi teiginiai su bet kuriomis n reikšmėmis bus teisingi.

Pavyzdys. Tarkime, nurodyta teiginio funkcija $A(n)$: $n^2 - n + 41$ yra pirminis skaičius.

Kai $n = 1$, gaunamas teisingas teiginys $A(1)$: $1^2 - 1 + 41$ yra pirminis skaičius.

Kai $n = 2$, gaunamas teisingas teiginys $A(2)$: $2^2 - 2 + 41$ yra pirminis skaičius.

Taip pat teisingi tokie teiginiai: $A(3)$, ..., $A(40)$.

Ir jeigu iš to padarytume išvadą, jog teiginio funkcijos $A(n)$ sprendinių aibė yra *N*, suklystume, nes jau teiginys $A(41)$ yra klaidingas.

Matematinė (pilnoji) indukcija

Teiginio funkcijos $A(n)$ sprendinių aibė yra *N*, kai:
... teiginys $A(1)$ yra teisingas ir
... teiginio funkcijos $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ sprendinių aibė yra *N*.

Pavyzdžiai. Iš $A(n)$: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis gaunami teisingi teiginiai. Tai galima įrodyti matematinės indukcijos metodu:

$A(1)$: $1=\dfrac{1\cdot 2}{2}$ (teisingas teiginys);

$$A(n)\Rightarrow A(n+1): 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Iš teiginio funkcijos $A(n)$: $2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$ su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis gaunami teisingi teiginiai:

$A(1)$: $2^0+2^1=2^{1+1}-1$ (teisingas teiginys).

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^0+2^1+2^2+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^0+2^1+2^2+...+2^n+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^0+2^1+2^2+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1.$

Iš $A(n)$: $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis gaunami teisingi teiginiai:

$A(1)$: $1^2=\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ (teisingas teiginys).

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

$A(n)$: Iš $2^n>n^2$ su visais $n\in \boldsymbol{N}\setminus\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ gaunami teisingi teiginiai:

$A(5)$: $2^5>5^2$ (teisingas teiginys).

$A(n)\Rightarrow A(n+1): 2^n>n^2\Rightarrow 2^n\cdot 2>n^2\cdot 2\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{n+1}>2n^2\Rightarrow 2^{n+1}>(n+1)^2.$

Ši nelygybė teisinga su visais $n\geq 3$, nes

$2n^2>(n+1)^2\Leftrightarrow 2n^2>n^2+2n+1\Leftrightarrow n^2-2n-1>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n-1)^2>2.$

Įrašius $n=1$ arba $n=2$, gaunamos klaidingos nelygybės $0>2$ ir $1>2$. Kai $n=3$, $n=4$, ..., gaunamos teisingos nelygybės $4>2$, $9>2$, ...

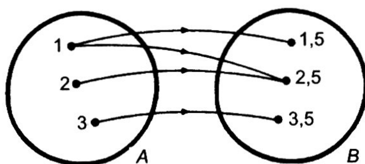
4. Funkcijos

4.1. Pagrindinės sąvokos

Sąryšiai

Tarkime, nurodytos dvi aibės A ir B ir jas atitinkanti aibių sandauga $A \times B$. Bet kuris aibės A ir B poaibis G nusako sąryšį tarp aibių A ir B. Tai simboliais užrašoma taip: $A \rho B$ (skaitoma: A ro B). Kai sąryšiu ρ elementui $a \in A$ priskiriamas elementas $b \in B$, rašoma $a \rho b$. Aibė G, kuri nusako priskyrimo taisyklę, vadinama sąryšio grafiku (plg. p. 46).

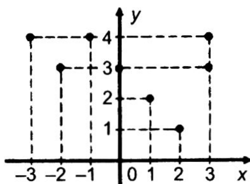
Pavyzdžiai. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1{,}5,\ 2{,}5,\ 3{,}5\}$. Aibių A ir B elementus sieja sąryšis, nusakytas tokia priskyrimo taisykle: $G = \{(1; 1{,}5), (1; 2{,}5), (2; 2{,}5), (3; 3{,}5)\}$. G galima grafiškai pavaizduoti rodykline diagrama:



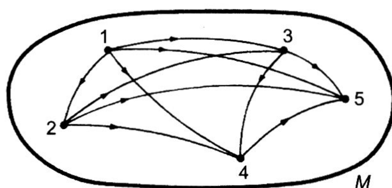
$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$,

$G = \{(-3; 4), (-2; 3), (-1; 4), (0; 3), (1; 2), (2; 1), (3; 3), (3; 4)\}$.

Šio sąryšio grafiką galima pavaizduoti stačiakampėje koordinačių sistemoje xy. Kiekvieną reikšmių porą atitinka tos sistemos taškas.



Sąryšį tarp aibės $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ir M galima pavaizduoti taip:



Funkcijos

> Funkcija (atvaizdžiu) vadinamas sąryšis tarp dviejų aibių D ir E, kuris kiekvienam D elementui priskiria apibrėžtą aibės E elementą. Simboliais užrašoma taip:
>
> $$f: x \to f(x),\ x \in D \text{ arba } y = f(x),\ x \in D.$$

Sąvokos: D vadinama apibrėžimo sritimi, E – reikšmių sritimi. Bet kuris elementas $x \in D$ vadinamas funkcijos argumentu, jį atitinkantis elementas $y \in E$ vadinamas funkcijos reikšme taške x.

$G = \{(x;\ y);\ \text{čia } x \in D \wedge y = f(x)\}$ yra funkcijos f grafikas; $y = f(x)$ – funkcijos lygtis; $f(x)$ – funkcijos reiškinys. Jo apibrėžimo aibė nebūtinai turi sutapti su funkcijos apibrėžimo sritimi. Funkcijos apibrėžimo sritis gali būti reiškinio apibrėžimo aibės poaibis.

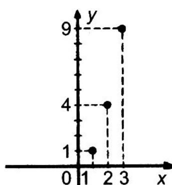
Pavyzdžiai. Vienareikšmiškai, priskyrus kiekvienam natūraliajam skaičiui jo kvadratą, gaunama funkcija, susiejanti aibes $\boldsymbol{N}$ ir $M = \{1, 4, 9, ...\}$. Panašiai kaip ir sąryšius, funkcijas galima nusakyti įvairiais būdais.

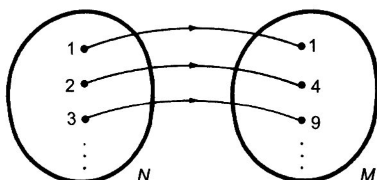
Funkcijos lygtimi: $y = x^2,\ x \in \boldsymbol{N}$.

Reikšmių lentele:

x	1	2	3	4	...
y	1	4	9	16	...

Koordinačių sistemoje *Rodykline diagrama*



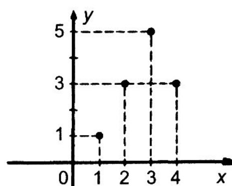


Grafikas $G = \{(1;\ 1),\ (2;\ 3),\ (3;\ 5),\ (4;\ 3)\}$ apibrėžia funkciją, susiejančią aibes $D = \{1, 2, 3, 4\}$ ir $E = \{1, 3, 5\}$,

funkcijos lygtimi:

$$y = \begin{cases} 2x - 1, & x \in \{1, 2, 3\}, \\ 3, & x = 4; \end{cases}$$

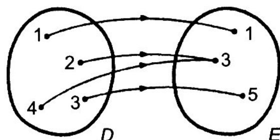
koordinačių sistemoje:



reikšmių lentele:

x	1	2	3	4
y	1	3	5	3

rodykline diagrama:



Empirinės funkcijos

Aplink mus yra daugybė dviejų aibių elementų vienareikšmės atitikties pavyzdžių. Šie sąryšiai tiriami stebint ir matuojant. Nagrinėdami pavyzdžius iš gamtos mokslų, technikos arba ūkio dažniausiai susiduriame su funkcijomis, kurios susieja vardinius skaičius (dydžius). Šios funkcijos vadinamos empirinėmis funkcijomis. Jos dažniausiai apibūdinamos reikšmių lentelėmis arba grafikais (diagramomis). Šių funkcijų grafiką gali sudaryti pavieniai taškai arba taškai, sujungti atkarpomis.

Pavyzdžiai

Vidutinė oro temperatūra, išmatuota 3000 m aukštyje virš jūros lygio:

Saus	Vas	Kov	Bal	Geg	Liep	Rugp	Rugs	Sp	Lapkr	Gruod
–11,2	–11	–9,9	–7,2	–4,8	1,8	1,6	–0,2	–3,8	–7,2	–9,9

Šios funkcijos grafiką sudaro pavieniai taškai. Sujungus juos laužte, ji vaizdžiai pademonstruoja temperatūros kaitos tendenciją, tačiau jos grandys grafikui nepriklauso.

Produkto paklausa tonomis

Pusmetis	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tonos	5	7,5	12,5	15	7,5	5	5	10	12,5

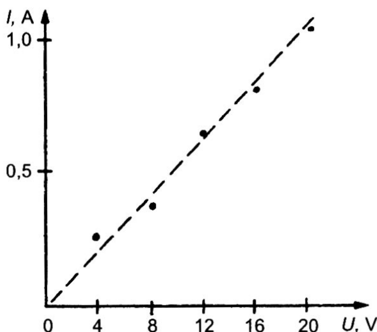
Šios funkcijos grafiką sudaro atskiri taškai.

Išmatuotas 100 asmenų, priklausančių tai pačiai amžiaus grupei, ūgis. Gautas toks skirstinys (x – ūgis, cm, y – absoliutusis dažnis):

x	<173	173	174	175	176	177	178	179	>179
y	2	10	21	25	22	9	6	4	1

Aibės, sudarytos iš matmenų porų, gautų atliekant bandymus, apibūdina empirines funkcijas. Pavyzdžiui, srovės stipris I yra įtampos U empirinė funkcija.

U	0	4	8	12	16	20 V
$I = g(U)$	0	0,24	0,39	0,65	0,76	1,05 A



Nors ši funkcija gauta iš baigtinio skaičiaus matavimo duomenų, pasižyminčių tam tikromis paklaidomis, tačiau taškų seka visgi parodo nagrinėjamo proceso vyksmo tendenciją. Gautą empirinę funkciją galima laikyti tikrai egzistuojančios funkcijos f artiniu.

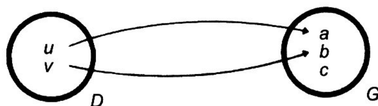
Funkcijos g grafiką sudaro taškai, funkcijos f grafikas vaizduojamas nubrėžta linija. Kadangi funkcijos f grafikas labai artimas tiesei, galima daryti išvadą, jog šiuo atveju įtampos ir stiprio dydžiai yra proporcingi.

Injekcija, surjekcija, bijekcija

Funkcijas galima suklasifikuoti pagal įvairius požymius. Šiame skyriuje pateikiama svarbiausia jų klasifikacija.

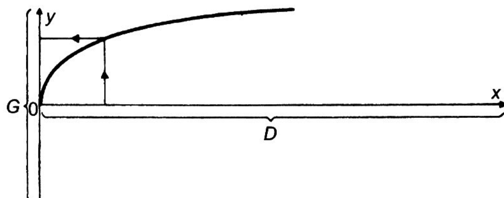
> Funkcija, nusakanti sąryšį tarp aibių D ir G, vadinama injekcija, kai kiekvieną aibės G elementą atitinka daugiausiai vienas apibrėžimo srities D elementas.

Pavyzdžiai. *Bendrasis atvaizdis*



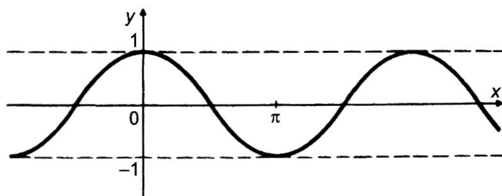
Injekcija, apibrėžta grafiku

Apibrėžimo sritis: $D = \boldsymbol{R}^+$, reikšmių sritis: $E = \boldsymbol{R}_0^+$, $G = \boldsymbol{R}$.



> Funkcija, nusakanti sąryšį tarp aibių D ir G, vadinama surjekcija, kai kiekvieną aibės G elementą atitinka mažiausiai vienas apibrėžimo srities D elementas.

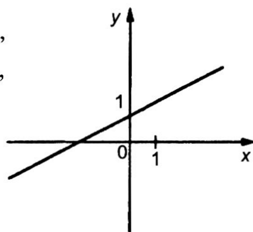
Pavyzdys. Surjekcija, apibrėžta grafiku:
$D = \boldsymbol{R}$, $G = E = [-1; 1]$.



> Bijekcija vadinama funkcija, kuri kartu yra ir injekcija, ir surjekcija.

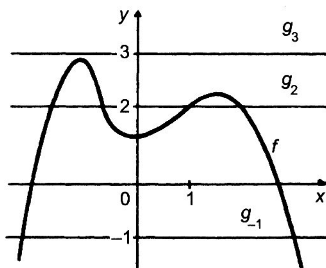
Kai funkcija, nusakanti sąryšį tarp aibių D ir G, yra bijekcija, kiekvieną aibės G elementą atitinka tiksliai vienas apibrėžimo srities D elementas, nes posakių „daugiausiai vienas“ ir „mažiausiai vienas“ konjunkcija yra „tiksliai vienas“.

Pavyzdys. Funkcija $f : x \to \frac{1}{2}x + 1,\ x \in \boldsymbol{R}$, kaip galima sužinoti iš grafiko, yra bijekcija.



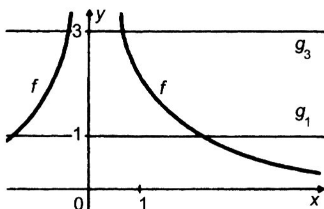
Iš funkcijos grafiko galima lengvai atpažinti, ar nagrinėjamoji funkcija yra injekcija, surjekcija arba bijekcija. Kaip pagalbinė priemonė tinka tiesių šeima $g_a : x \to a,\ x \in \boldsymbol{R}$; čia a – realioji konstanta. Visos tiesės yra lygiagrečios su abscisių ašimi.

Šalia pateiktas funkcijos f grafikas. Tos funkcijos apibrėžimo sritis yra aibė $\boldsymbol{R}$, aibė G sutampa su aibe $\boldsymbol{R}$. Paveiksle pavaizduotos tiesių šeimos tiesės g_3, g_2 ir g_{-1}. Kadangi tiesė g_3 nekerta funkcijos f grafiko, tai f nėra surjekcija, nes ne kiekvieną aibės G elementą atitinka mažiausiai vienas apibrėžimo srities elementas.



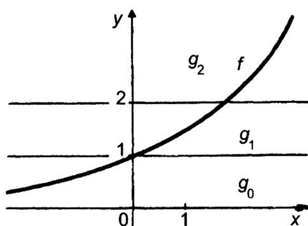
Kadangi tiek g_2, tiek ir g_{-1} kerta funkcijos f grafiką daugiau nei viename taške, funkcija f nėra injekcija, nes ne kiekvieną aibės G elementą atitinka daugiausiai vienas apibrėžimo srities elementas. Kadangi funkcija f nėra nei injekcija, nei surjekcija, tai ji nėra bijekcija.

Šalia pateiktas funkcijos f grafikas. Tos funkcijos apibrėžimo sritis yra $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, aibė G sutampa su $\boldsymbol{R}^+$. Paveiksle be funkcijos f grafiko dar nubrėžtos tiesių šeimos $g_a : x \to a,\ x \in \boldsymbol{R},\ a \in \boldsymbol{R}^+$ tiesės g_1 ir g_3. Kiekviena tiesių šeimos g_a tiesė kerta funkcijos f grafiką dviejuose taškuose. Iš to išplaukia, kad f nėra injekcija, kadangi ne kiekvieną aibės $G = \boldsymbol{R}^+$ elementą atitinka daugiausiai vienas apibrėžimo srities elementas. Bet funkcija yra surjekcija, nes kiekvieną aibės G elementą atitinka mažiausiai vienas apibrėžimo srities elementas; f nėra bijekcija, nes ji nėra injekcija.

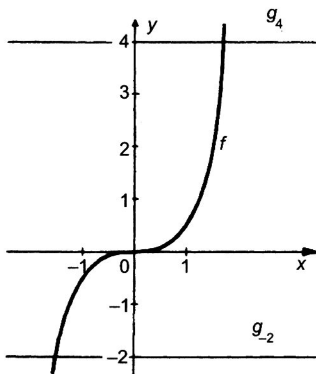


109 puslapyje pavaizduotas funkcijos f grafikas. Šios funkcijos apibrėžimo sritis $\boldsymbol{R}$ ir aibė G sutampa su $\boldsymbol{R}_0^+$. Tiesės g_0, g_1 ir g_2 yra trys tiesių šeimos $g_a : x \to a,\ x \in \boldsymbol{R},\ a \in \boldsymbol{R}_0^+$ tiesės. Kadangi tiesė g_0 nekerta

funkcijos f grafiko, tai f nėra surjekcija, nes yra vienas aibės G elementas, $y = 0$, nepriskirtas mažiausiai vienam apibrėžimo srities elementui. Kiekviena tiesių šeimos g_a tiesė kerta funkcijos f grafiką daugiausiai viename taške, taigi f yra injekcija. Funkcija nėra bijekcija.



Funkcijos f apibrėžimo sritis yra $\boldsymbol{R}$ ir aibė G sutampa su $\boldsymbol{R}$. Kiekviena tiesių šeimos $g_a : x \to a,\ x \in \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}$ tiesė kerta funkcijos f grafiką tiksliai viename taške. Funkcija f yra injekcija, nes kiekvieną aibės $G = \boldsymbol{R}$ elementą atitinka daugiausiai vienas apibrėžimo srities elementas. Kadangi f yra ir injekcija, ir surjekcija, tai f yra bijekcija.



4.2. Monotoninės funkcijos

Griežtai monotoniškai didėjančios funkcijos

> Aibėje D apibrėžta funkcija f vadinama griežtai monotoniškai didėjančia toje aibėje, jeigu su visais
>
> $$x_1,\ x_2 \in D \wedge x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Praktiškai tiriant funkcijos monotoniškumo pobūdį naudinga taisyklė, išplaukianti iš apibrėžimo: funkcija f yra griežtai monotoniškai didėjanti aibėje D, kai su bet kuriais

$$x_1,\ x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Pavyzdžiai. Funkcija $f: x \to 3x+1,\ x \in \boldsymbol{R}$ arba $y = 3x+1$ yra griežtai monotoniškai didėjanti, kadangi su visais $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R} \wedge x_1 \neq x_2$ teisinga nelygybė

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(3x_1+1)-(3x_2+1)}{x_1-x_2} = 3 > 0.$$

Funkcija $f: x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R}^+$ arba $y = x^2$ yra griežtai monotoniškai didėjanti, nes su visais $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}^+ \wedge x_1 \neq x_2$ teisinga nelygybė

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2} = \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{x_1-x_2} =$$
$$= x_1+x_2 > 0.$$

Griežtai monotoniškai mažėjančios funkcijos

> Aibėje D apibrėžta funkcija f vadinama griežtai monotoniškai mažėjančia, jeigu su visais $x_1,\ x_2 \in D \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Praktiškai tiriant funkcijos monotoniškumo pobūdį naudinga taisyklė, išplaukianti iš apibrėžimo: funkcija f yra griežtai monotoniškai mažėjanti, kai su bet kuriais $x_1,\ x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$.

Pavyzdžiai. Funkcija $f: x \to -2x+3,\ x \in \boldsymbol{R}$ arba $y = -2x+3$ yra griežtai monotoniškai mažėjanti, nes su visais $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R} \wedge x_1 \neq x_2$ teisinga nelygybė

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(-2x_1+3)-(-2x_2+3)}{x_1-x_2} = -2 < 0.$$

Funkcija $f: x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R}^-$ yra griežtai monotoniškai mažėjanti, nes su visais $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}^- \wedge x_1 \neq x_2$ teisinga nelygybė

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=$$
$$=x_1+x_2<0.$$

Aprėžtosios funkcijos

Aibėje D apibrėžta funkcija vadinama aprėžta toje aibėje, kai yra du skaičiai $s, S \in \boldsymbol{R}$ ir tokie, kad su visais $x \in D \Rightarrow s \leq f(x) \leq S$.

Skaičius s vadinamas apatiniu rėžiu, skaičius S – viršutiniu rėžiu. Aprėžtosios funkcijos rėžiai neapibūdinami vienareikšmiškai, nes bet kuris už s mažesnis skaičius irgi yra apatinis rėžis, o bet kuris didesnis už S irgi yra viršutinis rėžis.

Kiekviena funkcija bet kuriame baigtiniame jos apibrėžimo srities poaibyje yra aprėžtoji, nes tarp be galo daug funkcijos reikšmių yra mažiausioji ir didžiausioji reikšmės, kurias galima laikyti funkcijos rėžiais.

Pavyzdžiai. $f: x \to 3x-5,\ x \in [-2; 4]$ yra aprėžtoji funkcija;

$s=f(-2)=-6-5=-11,\ S=f(4)=3\cdot 4-5=7.$

$$f: x \to \frac{1}{x^2+1},\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Rėžius randame pritaikę dvigubą nelygybę:

$$0 \leq 1 \leq x^2+1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Taigi rėžiai yra tokie: $s = 0$, $S = 1$.

4.3. Veiksmai su funkcijomis

Tarkime, nurodytos dvi funkcijos $f_1: x \to f_1(x),\ x \in D_1$ ir $f_2: x \to f_2(x),\ x \in D_2$. Šias funkcijas galima sudėti, atimti, dauginti ir dalyti. Bet kurio tokio veiksmo rezultatas – nauja funkcija, jos apibrė-

žimo sritis yra funkcijų, kuriomis operuojama, apibrėžimo sričių sankirta. Iš funkcijos, gaunamos dalijant vieną funkciją iš kitos, apibrėžimo srities pašalinami taškai, kurie yra vardiklio sprendiniai.

Suma: $f_1 + f_2 : x \to f_1(x) + f_2(x),\ x \in D_1 \cap D_2.$

Skirtumas: $f_1 - f_2 : x \to f_1(x) - f_2(x),\ x \in D_1 \cap D_2.$

Sandauga: $f_1 \cdot f_2 : x \to f_1(x) \cdot f_2(x),\ x \in D_1 \cap D_2.$

Dalmuo: $\frac{f_1}{f_2} : x \to \frac{f_1(x)}{f_2(x)},\ x \in (D_1 \cap D_2) \setminus \{x,$ su kuriais $f_2(x) = 0\}.$

Pavyzdžiai. Nurodytos funkcijos $f_1 : x \to 2x,\ x \in \boldsymbol{R}$ ir $f_2 : x \to x^2 - 1,$ $x \in \boldsymbol{R}$. Galima sudaryti tokias naujas funkcijas:

$$f_1 + f_2 : x \to x^2 + 2x - 1,\ x \in \boldsymbol{R};$$

$$f_1 - f_2 : x \to 2x - x^2 + 1,\ x \in \boldsymbol{R};$$

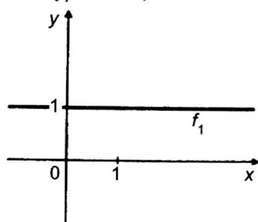
$$f_1 \cdot f_2 : x \to 2x^3 - 2x,\ x \in \boldsymbol{R};$$

$$\frac{f_1}{f_2} : x \to \frac{2x}{x^2 - 1},\ x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1,\ 1\}.$$

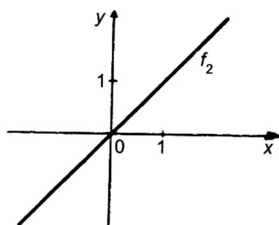
Pritaikius išvardytas operacijas, iš pastovių funkcijų $f_k : x \to k,$ $x \in \boldsymbol{R}$, kurių grafikai yra su abscisių ašimi lygiagrečios tiesės, bei iš funkcijos $f : x \to x,\ x \in \boldsymbol{R}$, kurios grafikas yra koordinačių sistemos pirmojo ir trečiojo ketvirčio pusiaukampinė, galima gauti visą klasę funkcijų, pavadintų racionaliosiomis funkcijomis.

Pavyzdžiai. Pateiktos funkcijos $f_1 : x \to 1,\ x \in \boldsymbol{R}$ ir $f_2 : x \to x,\ x \in \boldsymbol{R}$ bei jų grafikai. Panaudojus sudėtį, atimtį, daugybą ir dalybą iš pradžių gaunama pirmoji naujų funkcijų generacija. Taikant toliau minėtąsias operacijas galima gauti be galo daug funkcijų, apibūdinamų skirtingais reiškiniais.

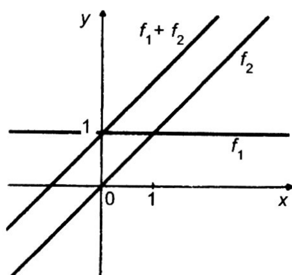
$f_1 : x \to 1,\ x \in \boldsymbol{R}$



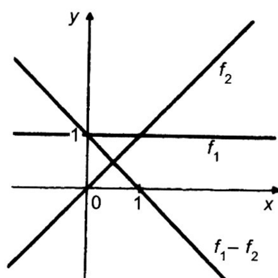
$f_2 : x \to x,\ x \in \boldsymbol{R}$



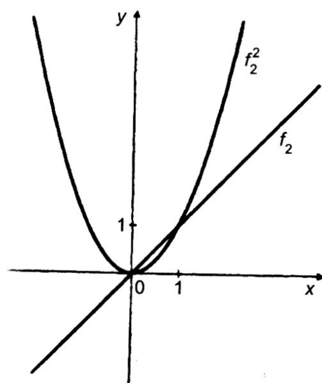
$f_1 + f_2 : x \to 1 + x,\ x \in \boldsymbol{R}$



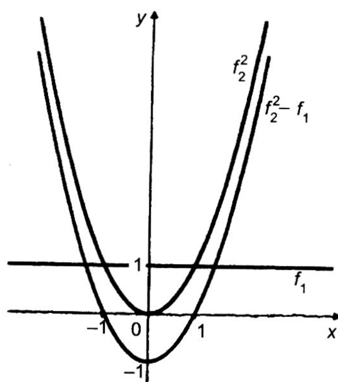
$f_1 - f_2 : x \to 1 - x,\ x \in \boldsymbol{R}$



$f_2 \cdot f_2 : x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R}$



$f_2^2 - f_1 : x \to x^2 - 1,\ x \in \boldsymbol{R}$



Toliau galima sukonstruoti, pavyzdžiui, tokias funkcijas:

$$f_2^2 \cdot f_2 : x \to x^3,\ x \in \boldsymbol{R},\ f_2^3 + f_1 : x \to x^3 + 1,\ x \in \boldsymbol{R},$$

$$\frac{f_2 - f_1}{f_2^3 + f_1} : x \to \frac{x-1}{x^3+1},\ x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1\}.$$

4.4. Atvirkštinės funkcijos

Funkcijų superpozicija

Tarkime, nurodytos funkcijos $f_1 : x \to f_1(x),\ x \in D_1$ ir $f_2 : x \to$ $\to f_2(x),\ x \in D_2$. Aibės D_1 vaizdas, gautas panaudojant funkciją f_1, žymimas $f_1(D_1)$.

Kai $f_1(D_1) \subset D_2$, galima apibrėžti sudėtinę funkciją $f_2 \circ f_1 : x \to f_2(f_1(x)),\ x \in D_1$ (skaitoma: f_2 nuo $f_1(x)$).

f_2 vadinama išorine funkcija, f_1 – vidine funkcija. Norint praktiškai atlikti funkcijų superpoziciją, reikia išorinės funkcijos reiškinyje vietoj kintamojo įrašyti vidinės funkcijos reiškinį.

Pavyzdžiai. $f_1 : x \to 2x - 1,\ x \in \boldsymbol{R},\ f_2 : x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R},$

$$f_2 \circ f_1 : x \to (2x-1)^2,\ x \in \boldsymbol{R},$$

$$f_1 \circ f_2 : x \to 2x^2 - 1,\ x \in \boldsymbol{R},$$

$$f_1 : x \to x - 2,\ x \in [2;\ +\infty),\ f_2 : x \to \sqrt{x},\ x \in \boldsymbol{R}_0^+,$$

$$f_2 \circ f_1 : x \to \sqrt{x-2},\ x \in [2;\ +\infty),$$

$$f_1 \circ f_2 : x \to \sqrt{x} - 2,\ x \in \boldsymbol{R}_0^+.$$

Funkcija f: $x \to \sqrt[4]{x^2+1},\ x \in \boldsymbol{R}$ yra funkcijų $f_2 : x \to \sqrt[4]{x}$, $x \in \boldsymbol{R}^+$ ir $f_1 : x \to x^2 + 1,\ x \in \boldsymbol{R}$ superpozicijos rezultatas.

Teisingas sąryšis: $f = f_2 \circ f_1$.

$$f : x \to (3x+1)^3 + 2(3x+1)^2 + 4(3x+1),\ x \in \boldsymbol{R},$$
$$f_1 : x \to 3x+1,\ x \in \boldsymbol{R},$$
$$f_2 : x \to x^3 + 2x^2 + 4x,\ x \in \boldsymbol{R},\ f = f_2 \circ f_1.$$

Atvirkštinės funkcijos

Tarkime, nurodyta funkcija $f : x \to f(x)$, $x \in D$. Jeigu egzistuoja funkcija $f^* : x \to f^*(x)$, $x \in f(D)$ su kuria $f^*(f(x)) = x$, $x \in D$, tai funkcija f^* vadinama atvirkštine funkcijai f.

Atvirkštinės funkcijos dažnai žymimos f^{-1}. Kai f yra bijekcija, ji turi atvirkštinę funkciją. Todėl bijekcijos dar vadinamos apgręžiamosiomis funkcijomis.

Norint surasti funkcijai f atvirkštinę funkciją, reikia lygtį $y = f(x)$ išspręsti x atžvilgiu, o kintamuosius x ir y sukeisti vietomis.

Pavyzdžiai. $f : x \to \frac{1}{2}x + \frac{1}{3},\ x \in \boldsymbol{R},$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2}x = y - \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2y - \frac{2}{3}$$ (išspręsta x atžvilgiu),

$$y = 2x - \frac{2}{3}$$ (x ir y sukeisti vietomis),

$$f^* : x \to 2x - \frac{2}{3},\ x \in \boldsymbol{R}.$$

$f : x \to 3x - 1,\ x \in \boldsymbol{R}$ ir $f^* : x \to \frac{1}{3}(x+1),\ x \in \boldsymbol{R}$ yra viena kitai atvirkštinės funkcijos, nes $f^*(f(x)) = \frac{1}{3}((3x-1) + +1) = x$ su visais $x \in \boldsymbol{R}$.

Funkcija $f : x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R}_0^+$ yra bijekcija ir turi atvirkštinę funkciją

$$f^* : x \to \sqrt{x},\ x \in \boldsymbol{R}_0^+.$$

4.5. Tiesinės funkcijos

Apibrėžimas ir grafikas

> Funkcijos $f: x \to mx + t$, kai $x \in D \subset \boldsymbol{R}$, o m, r – realieji skaičiai, vadinamos tiesinėmis funkcijomis.

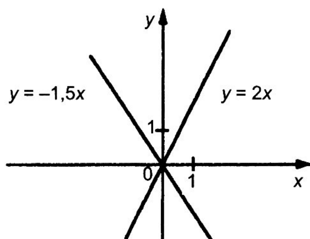
Kai $D = \boldsymbol{R}$, dažnai užrašoma tik formulė $y = mx + t$. Kiekviena tiesinė funkcija, kai $m \neq 0$, $D = \boldsymbol{R}$ ir $G = \boldsymbol{R}$ yra bijekcija, taigi yra apgręžiamoji. Tiesinės funkcijos, apibrėžtos aibėje $D = \boldsymbol{R}$, grafikas yra tiesė.

Pavyzdžiai. $f(x) = 2x$

x	–1	0	2
y	–2	0	4

$f(x) = -1{,}5x$

x	–1	0	2
y	1,5	0	–3



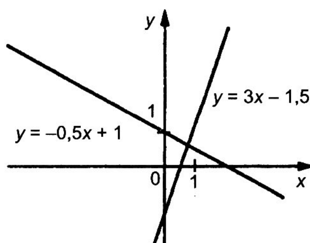
Abiejų funkcijų grafikai eina per koordinačių sistemos pradžią, konstantos t reikšmė lygi 0.

$f(x) = -0{,}5x + 1$

x	–1	0	3
y	1,5	1	–0,5

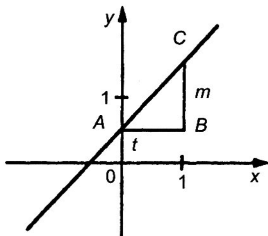
$f(x) = 3x - 1{,}5$

x	–1	0	1
y	–4,5	–1,5	1,5



Konstanta $t = 1$, atitinkamai $t = -1{,}5$, parodo vietą, kurioje tiesė kerta ordinačių ašį. Kita konstantos t prasmė tokia: per koordinačių pradžią einančios tiesės $f(x) = -0{,}5x$, atitinkamai $f(x) = 3x$, yra perstumtos išilgai ordinačių ašies per 1 vienetą į viršų, atitinkamai per 1,5 vieneto į apačią.

Posvyrio trikampis

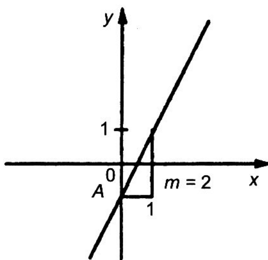


Kiekvienai tiesinei funkcijai galima priskirti statųjį posvyrio trikampį ABC. Viršūnių koordinatės yra tokios: $A(0;\ t)$, $B(1;\ t)$, $C(1;\ m + t)$. m yra posvyrio rodiklis, kuris vadinamas tiesės krypties koeficientu. Teigiamai orientuotas kampas α, kurį tiesė sudaro su abscisių ašimi, vadinamas posvyrio kampu. Tiesės krypties koeficientą m bei posvyrio kampą α sieja trigonometrinis sąryšis $m = \operatorname{tg} \alpha$. Pritaikius posvyrio trikampį, o ne reikšmių lentelę, galima greičiau nubraižyti tiesinės funkcijos grafiką.

Pavyzdžiai. $f: x \to 2x - 1,\ x \in \boldsymbol{R}$,

$m = 2,\ t = -1$.

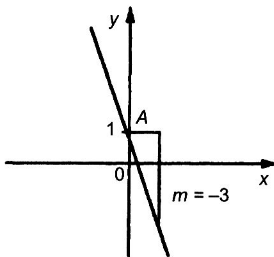
Pirmiausia pažymimas taškas A, po to nubraižomas posvyrio trikampis. Ilgesnioji posvyrio trikampio kraštinė ir yra brėžiamos tiesės dalis.



$f: x \to 1 - 3x,\ x \in \boldsymbol{R}$,

$m = -3,\ t = 1$.

Kai tiesės krypties koeficientas yra neigiamas, posvyrio trikampis braižomas žemiau to taško, kuriame tiesė kerta ordinačių ašį. Tiesė eina iš kairės viršuje į dešinę apačioje.



Tarkime, kad žinomi du tiesės taškai $P_1(x_1;\ y_1)$ ir $P_2(x_2;\ y_2)$. Tada tiesės krypties koeficientas apskaičiuojamas pagal formulę:

tiesės krypties koeficientas $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pavyzdžiai: $P_1(2;\ 1),\ P_2(4;\ 6) \Rightarrow m = \frac{6-1}{4-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5;$

$P_1(-2;\ 5),\ P_2(2;\ -3) \Rightarrow m = \frac{-3-5}{2-(-2)} = \frac{-8}{4} = -2.$

Tiesės, einančios per du taškus, lygtis

Tiesinės funkcijos grafiko padėtį nustato du taškai, todėl žinant tų taškų koordinates galima rasti atitinkamos funkcijos lygtį. Iš pradžių panašiu būdu, koks buvo panaudotas prieš tai sprendžiant pavyzdžius, surandamas krypties koeficientas m. Po to įrašius į lygtį $y = mx + t$ kurio nors vieno iš nurodytųjų taškų koordinates, randama konstanta t. Suradus m ir t, kartu gaunama tiesės lygtis.

Pavyzdžiai. $P_1(-3;\ 1),\ P_2(2;\ 5),\ y = mx + t.$

m skaičiavimas: $m = \frac{5-1}{2-(-3)} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

t skaičiavimas: $5 = 0{,}8 \cdot 2 + t \Leftrightarrow 5 = 1{,}6 + t \Leftrightarrow t = 3{,}4.$

Tiesės lygtis: $y = 0{,}8x + 3{,}4.$

$P_1(4{,}5;\ 0),\ P_2(1;\ 3{,}5),\ y = mx + t.$

m skaičiavimas: $m = \frac{3{,}5-0}{1-4{,}5} = \frac{3{,}5}{-3{,}5} = -1.$

t skaičiavimas: $0 = -1 \cdot 4{,}5 + t \Leftrightarrow t = 4{,}5.$

Tiesės lygtis: $y = -x + 4{,}5.$

Atvirkštinės funkcijos

Tiesinė funkcija $f: x \to mx + t,\ x \in \boldsymbol{R}$ yra apgręžiamoji, kai $m \neq 0$. Atvirkštinė funkcija irgi yra tiesinė funkcija.

Pavyzdžiai: $f: x \to -3x + 1,\ x \in \boldsymbol{R},$

$y = -3x + 1,$

$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y,\quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3};$

$f^*: x \to -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3},\quad x \in \boldsymbol{R},$

$f : x \to 1,\ x \in \boldsymbol{R}$ arba $y = 1$.
Ši funkcija nėra apgręžiamoji, nes $m = 0$. Lygties $y = 1$ neįmanoma išspręsti kintamojo x atžvilgiu.

4.6. Kvadratinės funkcijos

Apibrėžimas

> Funkcija $f : x \to ax^2 + bx + c,\ x \in D \subset \boldsymbol{R},\ a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$ ir $a \neq 0$ vadinama kvadratine funkcija.

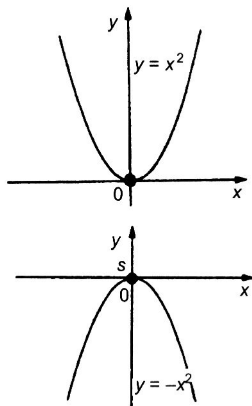
Kai apibrėžimo sritis $D = \boldsymbol{R}$, užrašoma tik kvadratinės funkcijos lygtis $y = ax^2 + bx + c$, nenurodant jos apibrėžimo srities. Kai $D = \boldsymbol{R}$, kvadratinė funkcija yra neapgręžiamoji. Kvadratinės funkcijos grafikas yra parabolė arba jos dalis. Norint nubraižyti parabolę, verta surasti jos viršūnės koordinates.

Atskirieji atvejai

$f : x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R},\ y = x^2$.

Funkcijos grafikas yra normalioji parabolė.

Taške $x = 0$ funkcija įgyja mažiausią reikšmę.



$f : x \to -x^2,\ x \in \boldsymbol{R},\ y = -x^2$.

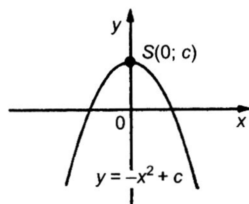
Grafikas yra abscisių ašies atžvilgiu veidrodiškai atspindėta normalioji parabolė.

$f : x \to x^2 + c,\ x \in \boldsymbol{R},\ y = x^2 + c$.

Grafikas yra ordinačių ašies kryptimi per c vienetų perstumta normalioji parabolė.

$f: x \to -x^2 + c,\ x \in \boldsymbol{R},\ y = -x^2 + c.$

Grafikas yra ordinačių ašies kryptimi per c vienetų perstumta, abscisių ašies atžvilgiu veidrodiškai atspindėta normalioji parabolė.



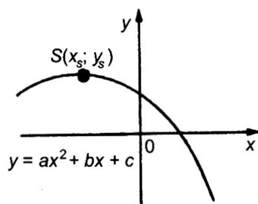
$f: x \to ax^2 + c,\ x \in \boldsymbol{R},\ y = ax^2 + c.$

Grafikas yra parabolė, kurios viršūnė $S(0;\ c)$.

$f: x \to ax^2 + bx + c,\ x \in \boldsymbol{R},$

$y = ax^2 + bx + c.$

Grafikas yra parabolė, kurios viršūnės koordinatės $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ ir $y_S = c - \dfrac{b^2}{4a}$.



Išskyrę dešinėje lygties $y = ax^2 + bx + c$ pusėje dvinario kvadratą, gauname viršūninę parabolės lygtį, iš kurios tiesiogiai gaunamos viršūnės koordinatės.

Viršūninė lygtis: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S.$

Konstanta a apibūdina parabolės formą. Konstantos a ženklas parodo, į kurią pusę nukreiptos parabolės šakos – į viršų ar į apačią. Pagal konstantos a modulį sprendžiame, ar parabolė yra normalioji, ar jos šakos suglaustos, ar išskėstos.

Pavyzdžiai. $f(x) = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = (x-2)^2 - 1,\ S(2; -1).$

$a = 1$, taigi nagrinėjamoji parabolė yra normalioji, jos šakos nukreiptos į viršų, o viršūnė perkelta į tašką $S(2; -1)$.

$f(x) = -x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow f(x) = -(x+1)^2$.

Nagrinėjamoji parabolė yra normalioji parabolė, jos šakos nukreiptos į apačią, o viršūnė perkelta į tašką $S(-1;\ 0)$.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\left((x+2)^2 - 2\right) \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1.$

Parabolės šakos nukreiptos į apačią, jos yra išskėstos, parabolės viršūnė S $(-2;\ 1)$.

Kvadratinių funkcijų apgręžiamumas

Kvadratinė funkcija, kurios apibrėžimo sritis $D = \mathbf{R}$, nėra bijekcija, taigi yra neapgręžiamoji. Tačiau tinkamai apribojus apibrėžimo sritį kvadratinė funkcija gali tapti apgręžiamąja.

Pavyzdys. Tarkime, kad nurodyta kvadratinė funkcija

$f(x) = x^2 - 4x + 3,\ x \in \mathbf{R}$ ir $G = \mathbf{R}$. Išskyrę dvinario kvadratą, gauname lygtį $f(x) = (x-2)^2 - 1$, iš kurios randame viršūnę $S(2;\ -1)$. Funkcija f nėra injekcija, nes, pavyzdžiui, $0 \in G$ atitinka reikšmės $1 \in D$ ir $3 \in D$. Funkcija f nėra surjekcija, nes, pavyzdžiui, $-2 \in G$ neatitinka nė vienas D elementas. Vadinasi, funkcija f nėra bijekcija. Tačiau tinkamai apribojus D ir G galima pasiekti, kad funkcija būtų bijekcija. Tai galima padaryti ne vienu būdu, pavyzdžiui,

$f_1(x) = x^2 - 4x + 3,\ x \in [2;\ +\infty),\ G_1 = [-1;\ +\infty)$.

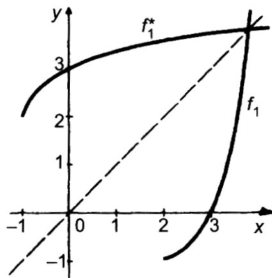
Šios funkcijos grafikas yra monotoniškai kylanti aukštyn parabolės dalis. Funkcija f_1 yra ir injekcija, ir surjekcija, taigi ji yra bijekcija. Todėl ji turi atvirkštinę funkciją f_1^*, kurios lygtis gaunama iš lygties $y = x^2 - 4x + 3$, išsprendus ją x atžvilgiu: $x^2 - 4x + (3 - y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12 + 4y}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{1+y}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{1+y}$.

Kadangi turi būti $x \geq 2$, tai tinka tik sprendinys $x = 2 + \sqrt{1+y}$. Sukeitus kintamuosius x ir y vietomis, gaunama $y = 2 + \sqrt{1+x}$. Taigi gauta atvirkštinė funkcija

$f_1^* : x \to 2 + \sqrt{1+x},\ x \in [-1;\ +\infty)$.



Susikirtimo su ašimis taškai

> Kai kvadratinė lygtis $ax^2 + bx + c = 0$, apibrėžta aibėje $D = \boldsymbol{R}$, turi sprendinius, jie vadinami kvadratinės funkcijos f nuliais. Kai x_1 yra vienas tų nulių, $N_1(x_1;\ 0)$ yra parabolės susikirtimo su abscisių ašimi taškas. Parabolė ordinačių ašį kerta taške $M(0;\ f(0))$.

Pavyzdžiai. Tarkime, nurodyta funkcija $f : x \to x^2 - 3x + 2,\ x \in \boldsymbol{R}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$.

Taškai $N_1(1;\ 0)$, $N_2(2;\ 0)$ yra parabolės susikirtimo su abscisių ašimi taškai.

$f(0) = 2 \Rightarrow M(0;\ 2)$ yra parabolės ir ordinačių ašies susikirtimo taškas.

Tarkime, nurodyta funkcija $f : x \to -4x^2 + 4x - 1,\ x \in \boldsymbol{R}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

(antrojo kartotinumo nulis) $\Rightarrow B\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ yra parabolės ir abscisių ašies lietimosi taškas, taigi parabolės viršūnė.

$f(0) = -1 \Rightarrow M(0;\ -1)$ yra parabolės ir ordinačių ašies susikirtimo taškas.

Grafikų susikirtimo taškai

Tarkime, nurodytos funkcijos $f: x \to f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, $g: x \to g(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Lygties $f(x) = g(x)$, $D = \boldsymbol{R}$ sprendiniai yra funkcijų f ir g grafikų susikirtimo taškų abscisės.

Kai x_1 yra vienas šių sprendinių, tai $S_1(x_1; f(x_1))$ kartu su $S_1(x_1; g(x_1))$ yra grafikų susikirtimo taškas, nes $f(x_1) = g(x_1)$.

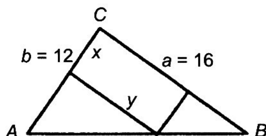
Pavyzdžiai. $f: x \to 2x - 8$, $x \in \boldsymbol{R}$ (grafikas yra tiesė),
$g: x \to x^2 + 7x - 4$, $x \in \boldsymbol{R}$ (grafikas yra parabolė).
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 8 = x^2 + 7x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1$.
$f(-4) = 2(-4) - 8 = -16$, $f(-1) = 2(-1) - 8 = -10$,
$S_1(-4; -16)$, $S_2(-1; -10)$.
$f: x \to 2x^2 - 5x - 7$, $x \in \boldsymbol{R}$ (grafikas yra parabolė),
$g: x \to x^2 - 4x - 1$, $x \in \boldsymbol{R}$ (grafikas yra parabolė).
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 - 5x - 7 = x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$.
$g(-2) = (-2)^2 - 4(-2) - 1 = 11$,
$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 - 1 = -4$,
$S_1(-2; -11)$, $S_2(3; -4)$.

Ekstremumai

Kai parabolės šakos nukreiptos į viršų, tai jos viršūnė yra žemiausias taškas, taigi kvadratinė funkcija šiame taške įgyja mažiausią reikšmę. Kai parabolės šakos nukreiptos į apačią, tai jos viršūnė yra aukščiausias taškas, taigi kvadratinė funkcija šiame taške įgyja didžiausią reikšmę.

Pavyzdys. Gamybos metu susidaro skardos atliekų. Šios atliekos yra statieji trikampiai, kurių statiniai a = 16 cm ir b = 12 cm. Norint sumažinti skardos atliekų kiekį, reikia iš šių trikampių iškirsti kuo didesnio ploto stačiakampius skardos gabalus.

Nežinomus stačiakampio matmenis pažymėkime kintamaisiais x ir y. Tada stačiakampio plotas $S = xy$. Remdamiesi Talio teorema, gauname sąryšį tarp x ir y:



$\frac{16}{y} = \frac{12}{12-x} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}(12-x)$.

(Norėdami supaprastinti užrašą, matavimo vienetų cm nerašome.)

Sudarome kvadratinę funkciją $S(x)$:

$$S = x \cdot y \Rightarrow S(x) = \frac{4}{3}x(12-x) \Leftrightarrow S(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 16x.$$

Apibrėžimo sritis yra atkarpa [0; 12].

Randame maksimumą:

$$S(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 16x \Leftrightarrow S(x) = -\frac{4}{3}(x^2 - 12x + 36 - 36) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(x) = -\frac{4}{3}\left((x-6)^2 - 36\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(x) = -\frac{4}{3}(x-6)^2 + 48, \ S(6; 48).$$

Kai iškertamo stačiakampio kraštinė x = 6 cm, jis turi didžiausią plotą, lygų 48 cm^2.

4.7. Sveikosios racionaliosios funkcijos

Apibrėžimas

Sveikąja racionaliąja funkcija vadinama funkcija $f : x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kai $x \in \boldsymbol{R}$, o $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ yra realiosios konstantos, vadinamos koeficientais, n yra natūralusis skaičius, jis vadinamas laipsniu, $a_n \neq 0$.

Reiškinys $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ vadinamas n-tojo laipsnio daugianariu.

Pavyzdžiai: $f : x \to 1,\ x \in \boldsymbol{R}$
(nulinio laipsnio sveikoji racionalioji funkcija);
$f : x \to 2x - 0,5,\ x \in \boldsymbol{R}$
(pirmojo laipsnio sveikoji racionalioji funkcija, arba tiesinė funkcija, $a_0 = -0,5,\ a_1 = 2$);
$f : x \to x^2 - \sqrt{5}x - 2,\ x \in \boldsymbol{R}$
(antrojo laipsnio sveikoji racionalioji funkcija, arba kvadratinė funkcija, $a_0 = -2,\ a_1 = -\sqrt{5},\ a_2 = 1$);
$f : x \to -x^3 - x^2 + 4x + 1,\ x \in \boldsymbol{R}$
(trečiojo laipsnio sveikoji racionalioji funkcija, $a_0 = 1$, $a_1 = 4,\ a_2 = -1,\ a_3 = -1$).

Veiksmai su sveikosiomis racionaliosiomis funkcijomis

Sveikąsias racionaliąsias funkcijas, kaip ir skaičius, galima sudėti, atimti ir dauginti. Šių veiksmų rezultatai visada yra sveikosios racionaliosios funkcijos.

Pavyzdžiai. *Sudėtis ir atimtis*

$f : x \to -x^3 + x^2 - 3x + 2,\ x \in \boldsymbol{R},$

$g : x \to \sqrt{2}x^2 + 4x + 1,\ x \in \boldsymbol{R},$

$f + g : x \to -x^3 + \left(1 + \sqrt{2}\right)x^2 + x + 3,\ x \in \boldsymbol{R},$

$f - g : x \to -x^3 + \left(1 - \sqrt{2}\right)x^2 - 7x + 1,\ x \in \boldsymbol{R}.$

Daugyba

$f : x \to -3x + 1,\ x \in \boldsymbol{R},$

$g : x \to 2x^3 - x^2 + x + 3,\ x \in \boldsymbol{R},$

$f \cdot g : x \to (1 - 3x)\left(2x^3 - x^2 + x + 3\right),\ x \in \boldsymbol{R},$

$f \cdot g : x \to -6x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 8x + 3,\ x \in \boldsymbol{R}.$

Simetrija

Sveikosios racionaliosios funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu, kai jos išraiškoje yra tik nelyginiai laipsnių rodikliai ir nėra laisvojo nario a_0. Sveikosios racionaliosios funkcijos grafikas yra simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, kai jos išraiškoje yra tik lyginiai laipsnių rodikliai. Kadangi laisvasis narys a_0 daro įtaką tik postūmiui išilgai ordinačių ašies, tai jis simetrijos nesugadina.

Pavyzdžiai: $f: x \to \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{6}x,\ x \in \boldsymbol{R}$ (grafikas simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu);

$f: x \to 5x^8 - 3x^6 + 4,\ x \in \boldsymbol{R}$ (grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu).

Nuliai

Tarkime, nurodyta funkcija $f: x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ x \in \boldsymbol{R}$. Lygties $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, apibrėžtos aibėje $\boldsymbol{R}$, sprendiniai vadinami funkcijos f nuliais.

Yra įvairių būdų, kaip surasti šiuos nulius. Tie būdai priklauso nuo lygties išraiškos. Svarbiausius tokių lygčių sprendimo metodus pademonstruokime spręsdami pavyzdžius.

Pavyzdžiai. $f: x \to x^2 - 6x + 5,\ x \in \boldsymbol{R}$.

$x^2 - 6x + 5 = 0$. Pritaikę kvadratinės lygties sprendinių formulę gauname paprastuosius nulius $x = 1 \vee x = 5$.

$f: x \to x^4 - 5x^2 + 4,\ x \in \boldsymbol{R}$.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Pakeitę $x^2 = t$, gauname kvadratinę lygtį $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 4$.

Iš keitinio $x^2 = t$ turime $x = \pm\sqrt{t}$. Įrašę gautąsias t reikšmes, randame sprendinius:

$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = -2$. Funkcija turi keturis paprastuosius nulius.

$f: x \to x^3 + x^2 + x,\ x \in \boldsymbol{R}$.

$x^3 + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Funkcija turi vieną paprastąjį nulį $x = 0$, nes skliaustuose esantis reiškinys nelygus nuliui.

$$f : x \to x^3 - x^2 - 4x + 4,\ x \in \boldsymbol{R}.$$
$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 1.$$

Funkcija turi tris paprastuosius nulius.

$$f : x \to (x-3)^3 (x+1)^2,\ x \in \boldsymbol{R}.$$
$$(x-3)(x-3)(x-3)(x+1)(x+1) = 0.$$

Funkcija turi trečiojo kartotinumo nulį $x = 3$ ir antrojo kartotinumo nulį $x = -1$.

Kai trečiojo ar aukštesniojo laipsnio sveikoji racionalioji funkcija turi sveikąjį nulį x_1, jis yra laisvojo nario a_0 daliklis. Norėdami surasti šį nulį, į funkcijos reiškinį paeiliui įrašome visus sveikuosius laisvojo nario daugiklius, kol randame x_1, su kuriuo $f(x_1) = 0$. Norėdami rasti kitus nulius, daugianarį $f(x)$ dalijame iš tiesinio daugiklio $x - x_1$. Šios dalybos rezultatas yra daugianaris $g(x)$, kurio laipsnis yra vienetu mažesnis negu $f(x)$ laipsnis. Dalybos liekana lygi 0. Kiti funkcijos f nuliai yra funkcijos g nuliai. Kai g yra antrojo laipsnio funkcija, jos nulius gauname, išsprendę kvadratinę lygtį $g(x) = 0$. Kai g laipsnis yra didesnis už kvadratą, tai g nuliai randami panašiu būdu, kaip iš pradžių buvo ieškoma f nulių. Išspręstas pavyzdys pateiktas 3.6 skyrelyje 62 puslapyje.

4.8. Trupmeninės racionaliosios funkcijos

Apibrėžimas

Trupmenine racionaliąja funkcija vadinamas dviejų sveikųjų racionaliųjų funkcijų dalmuo. Trupmeninės racionaliosios funkcijos apibrėžimo sritis yra $D = \boldsymbol{R}$, iš kurios pašalinti vardiklyje esančio daugianario nuliai.

Bendroji išraiška:

$$f : x \to \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}.$$

Kai $n \geq m$, funkcija vadinama netaisyklingąja racionaliąja, priešingai, kai $n < m$, ji vadinama taisyklingąja racionaliąja funkcija.

Pavyzdžiai: $f(x) = \dfrac{3x^5 - 4x^3 + 2x}{2x^4 + x - 6}$ – netaisyklingoji racionalioji funkcija,

$f(x) = \dfrac{4x^3 - 5x + 2}{-6x^4 + 3x^2 + 4x}$ – taisyklingoji racionalioji funkcija.

Netaisyklingąją racionaliąją funkciją, padalijus skaitiklį iš vardiklio kaip daugianarius, galima išreikšti sveikosios racionaliosios funkcijos ir taisyklingosios racionaliosios funkcijos suma.

Nuliai, poliai, lakūnos (spragos)

Taisyklingosios racionaliosios funkcijos *nuliai* yra jos skaitiklio daugianario nuliai, nesutampantys su vardiklio daugianario nuliais.

Pavyzdys: $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^4 + 8} \Rightarrow \dfrac{x^2 - 9}{x^4 + 8} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0,$

$x = -3 \vee x = 3$ (vardiklio daugianaris negali būti 0).

Taisyklingosios racionaliosios funkcijos *poliai* yra jos vardiklio daugianario nuliai, nesutampantys su skaitiklio daugianario nuliais.

Pavyzdys. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 25}.$

Nuliai: $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4.$

Poliai: $x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5.$

Taisyklingosios racionaliosios funkcijos *lakūnos* (arba spragos) yra bendrieji skaitiklio ir vardiklio daugianarių nuliai (kai jie yra vienodo kartotinumo).

Pavyzdžiai. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+3)}.$

$x = 3$ yra paprastasis nulis, $x = 2$ yra paprastasis polius, $x = -3$ yra lakūna.

$$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x^3+x^2-6x}.$$

Vardiklio nulius gauname išsprendę lygtį

$x^3+x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=$

$=-3 \vee x=2.$

Funkcijos apibrėžimo sritis yra $D = \boldsymbol{R} \setminus \{-3, 0, 2\}$.

Prilyginę skaitiklį nuliui, gauname lygtį

$$x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=-1.$$

Kadangi $x = -1$ yra skaitiklio nulis, bet nėra vardiklio nulis, tai $x = -1$ yra funkcijos nulis.

$x = -3$ yra ir skaitiklio, ir vardiklio nulis, todėl $x = -3$ yra f lakūna.

$x = 0$ ir $x = 2$ yra vardiklio nuliai, nesutampantys su skaitiklio nuliais, todėl $x = 0$ ir $x = 2$ yra f poliai.

$$f(x)=\frac{2x-3}{x^2+4x+4},\ D=\boldsymbol{R}\setminus\{-2\}.$$

$$x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2,$$

$$2x-3=0 \Leftrightarrow x=1,5.$$

$x = 1,5$ yra skaitiklio nulis, bet nėra vardiklio nulis, todėl $x = 1,5$ yra f nulis.

$x = -2$ yra antrojo kartotinumo vardiklio nulis, bet nėra skaitiklio nulis, todėl $x = -2$ yra f antrojo kartotinumo polius.

Skaitiklis ir vardiklis neturi vienodų nulių, todėl f neturi lakūnų.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1},\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{-1\}.$$

Skaitiklio laipsnis yra didesnis negu vardiklio. Todėl pirmiausia reikia skaitiklio daugianarį padalyti iš vardiklio daugianario. Šios dalybos rezultatas toks:

$$(x^3+x^2+x+1):(x+1)=x^2+1.$$

Kadangi tokia dalyba įmanoma, tai $x = -1$ yra bendras skaitiklio ir vardiklio nulis, todėl $x = -1$ yra f lakūna.

Funkciją galima užrašyti taip: $f(x)=x^2+1,\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$. Vadinasi, nurodytoji funkcija yra ne netaisyklingoji racionalioji, bet sveikoji racionalioji funkcija.

$f(x)=\dfrac{x^6+2x^4+1}{x^4},\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Skaitiklis neturi nulių. Vardiklis turi ketvirtojo kartotinumo nulį $x = 0$, kuris yra f ketvirtojo kartotinumo polius. Padalijus galima reiškinį pertvarkyti į reiškinį

$f(x)=x^2+2+x^{-4},\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Funkcijos pobūdis poliuose ir lakūnose

Funkcijos nuliai yra jos grafiko susikirtimo su abscisių ašimi taško abscisės. Kaip kinta funkcija artimoje poliui aplinkoje, reikia dar ištirti. Aišku, kad šiame taške funkcija nėra apibrėžta. Spręsdami pavyzdžius pademonstruokime, kaip tiriamas funkcijos pobūdis arti poliaus arba lakūnos.

Pavyzdys. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^3-x^2+3x-3}=\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+3)}$.

$x = 1$ yra vienintelis f polius. Apskaičiuojame keletą funkcijos reikšmių taškuose, artimuose poliui:

$f(0)=-0{,}3333;$	$f(2)=0{,}7143;$
$f(0{,}5)=-1{,}2300;$	$f(1{,}5)=1{,}5238;$
$f(0{,}9)=-7{,}3490;$	$f(1{,}1)=7{,}6000;$
$f(0{,}99)=-74{,}8730;$	$f(1{,}01)=75{,}1200;$
$f(0{,}999)=-749{,}87;$	$f(1{,}001)=750{,}12;$
...	...

Juo artimesnės poliui yra x reikšmės, tuo didesni atitinkamų funkcijos reikšmių moduliai. Tikėtina, kad šios funkcijos reikšmių didėjimas yra neaprėžtas. Kai prie poliaus artėjama iš kairės, funkcijos reikšmės neaprėžtai mažėja, kai prie poliaus artėjama iš dešinės, funkcijos reikšmės neaprėžtai didėja.

Norėdami išsiaiškinti, kuriose koordinačių sistemos srityse yra kreivė ir kuriose jos nėra, turime ištirti funkcijos ženklus. Pirmiausia rei-

kia skaitiklį ir vardiklį išskaidyti į kuo daugiau daugiklių.

Pavyzdys. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^3-x^2+3x-3}=\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+3)}$.

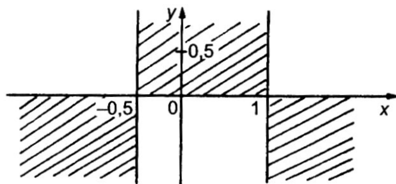
Kaip pasiskirstę ženklai, geriausiai matome iš lentelės:

x	–0,5 1
$2x+1$	– – – 0 + + ++ + + + + +
$x-1$	– – – – – – –0 + + + + +
x^2+3	+ + + + + + ++ + + + + +
$f(x)$	+ + + 0 – – –P + + + + +

Pirmoji ir paskutinioji eilutė parodo, jog grafikui K teisingi šie sąryšiai:

$$K\subset D_1=\{(x;\,y),\ x\le -0{,}5\wedge y\ge 0\},$$
$$K\subset D_2=\{(x;\,y),\ -0{,}5<x<1\wedge y<0\},$$
$$K\subset D_3=\{(x;\,y),\ x>1\wedge y>0\}.$$

Laukuose D_1, D_2, D_3 yra kreivės dalys, likusiuose užbrūkšniuotuose laukuose nagrinėjamos funkcijos grafiko dalių nėra.



$$f(x)=\frac{2x^2+3x}{x^3+x},\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}.$$

$x=0$ yra f lakūna. Suprastinę iš x, gausime funkcijos reiškinį; daugiklis, iš kurio suprastinome, neturės įtakos funkcijos reikšmės ženklams:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+1},\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}.$$

Norėdami ištirti funkcijos pobūdį lakūnoje, iš abiejų pusių artėjame prie šios lakūnos:

$f(-1)=-1,50000;$ $f(1)=2,50000;$

$f(-0,5)=1,60000;$ $f(0,5)=3,20000;$

$f(-0,1)=2,77000;$ $f(0,1)=3,17000;$

$f(-0,01)=2,97970;$ $f(0,01)=3,01700;$

$f(-0,001)=2,997979;$ $f(0,001)=3,001997;$

... ...

Funkcijos reikšmės artėja prie 3. Funkcija artimoje lakūnai $x = 0$ aplinkoje yra aprėžta.

x	–1,5	0
$2x + 3$	– – 0 + + +	+ + + +
$x^2 + 1$	+ + + + + +	+ + + +
$f(x)$	– – 0 + + +	L + + +

$$K\subset D_1=\{(x;\ y),\ x\le -1,5\wedge y\le 0\},$$

$$K\subset D_2=\{(x;\ y),\ 1,5<x<0\wedge y>0\},$$

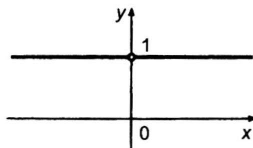
$$K\subset D_3=\{(x;\ y),\ x>0\wedge y>0\}.$$

4.9. Laipsninės funkcijos

Apibrėžimas

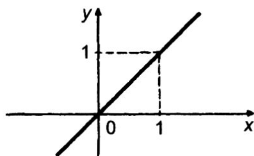
> Funkcija $f:x\to x^{\alpha},\ x\in D\subset \boldsymbol{R},\ \alpha\in \boldsymbol{R}$ vadinama laipsnine funkcija.

Pavyzdžiai. $f:x\to x^0,\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}.$
Funkcija yra neapgręžiamoji.



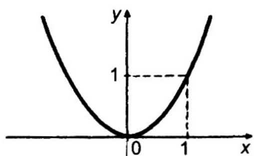
$f : x \to x^1,\ x \in \boldsymbol{R}.$

Funkcija yra apgręžiamoji ir sutampa su savo atvirkštine funkcija. Grafikas yra pirmojo ir trečiojo ketvirčio pusiaukampinė.



$f : x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R}.$

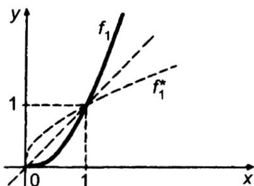
Ši funkcija yra neapgręžiamoji, nes ji nėra injekcija, t. y. du skirtingus aibės D elementus x_0 ir $-x_0$ atitinka ta pati funkcijos reikšmė x_0^2. Ordinačių ašis yra šios funkcijos grafiko simetrijos ašis. Funkcijos f grafikas yra normalioji parabolė.



$f_1 : x \to x^2,\ x \in \boldsymbol{R}_0^+.$

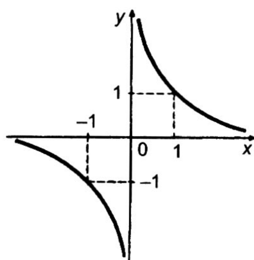
Ši funkcija yra apgręžiamoji, jos atvirkštinė funkcija tokia:

$f_1^* : x \to x^{\frac{1}{2}},\ x \in \boldsymbol{R}_0^+.$



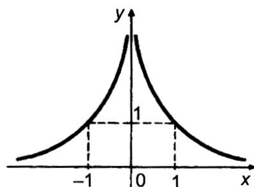
$f : x \to x^{-1},\ x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}.$

f yra apgręžiamoji ir sutampa su f^*. Jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu. Grafiką sudaro dvi hiperbolės šakos, ašys yra jo asimptotės.



$f : x \to x^{-2},\ x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}.$

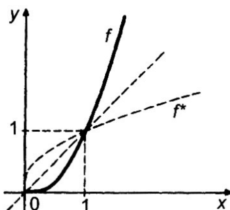
Funkcija yra neapgręžiamoji, nes ji nėra injekcija. Grafikas simetriškas ašies Oy atžvilgiu, ašys yra asimptotės.



$f : x \to x^{\frac{3}{2}},\ x \in \boldsymbol{R}_0^+.$

Atvirkštinė funkcija tokia:

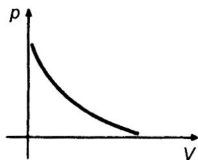
$f^* : x \to x^{\frac{2}{3}},\ x \in \boldsymbol{R}_0^+.$



Taikymai

Boilio ir Marioto dėsnis. Sakoma, jog uždarame inde esančių dujų slėgis p, kai temperatūra pastovi, yra atvirkščiai proporcingas tūriui V, taigi $p \cdot V = c$ arba $p = \frac{c}{V}$, c – konstanta.

Laikydami V nepriklausomuoju, o p priklausomuoju kintamuoju, turime laipsninę funkciją $p(V) = \frac{c}{V}$, $V \in \boldsymbol{R}^+$. Grafikas yra viena hiperbolės šaka ir fizikoje vadinamas izoterme. Keisdami c reikšmes (kurios priklauso nuo temperatūros), gautume skirtingas izotermes.



Gravitacijos dėsnis. Pasak Niutono gravitacijos dėsnio, jėga, kuria dvi masės traukia viena kitą, yra proporcinga masių sandaugai ir atvirkščiai proporcinga atstumo tarp jų kvadratui. Pažymėję jėgą simboliu F, abiejų kūnų mases m_1 ir m_2, atstumą tarp abiejų kūnų x, dėsnį galime užrašyti formule: $F = k\frac{m_1 \cdot m_2}{x^2}$, k yra gravitacijos konstanta.

Laikydami, kad $\frac{F}{k \cdot m_1 \cdot m_2} = f(x)$, gaunamе $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.
$f: x \to x^{-2}$, $x \in \boldsymbol{R}^+$ yra laipsninė funkcija ir apibūdina jėgos priklausomybę nuo atstumo tarp abiejų kūnų.

Trečiasis Keplerio dėsnis. Sakoma, jog laikų, per kuriuos dvi planetos apskrieja aplink Saulę, kvadratų santykis lygus tų planetų orbitų didžiųjų pusašių kubų santykiui: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Leftrightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$.

Laikydami $x = \frac{r_1}{r_2}$ kintamuoju, $x \in \boldsymbol{R}^+$, gaunamе, kad $y = \frac{T_1}{T_2}$ yra x funkcija: $y^2 = x^3 \Leftrightarrow y = x^{\frac{3}{2}}$.

$f: x \to x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \boldsymbol{R}^+$ yra laipsninė funkcija.

Sudėtiniai procentai (žr. 5 skyrių, p. 158). Pradinis indėlis K_0 buvo n metų laikomas banke, kurio metinių palūkanų norma lygi p. Kiekvienų metų pabaigoje indėlio procentai buvo prisumuojami prie jo. Po vienerių metų indėlis išaugo iki dydžio K_1:

$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Po dvejų metų indėlis padidėjo iki reikšmės K_2:

$$K_2 = K_1 + \frac{p}{100} \cdot K_1 = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Po n metų indėlis tapo lygus dydžiui $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

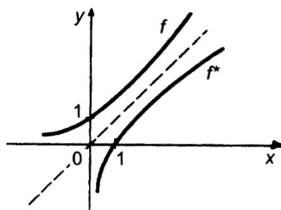
Pažymėję $1 + \frac{p}{100} = x$ ir $\frac{K_n}{K_0} = f_n(x)$, gaunamе lygtį $f_n(x) = x^n$. Kai palūkanų norma $p \in \boldsymbol{R}^+$ kinta, tai $x \in (1; +\infty)$ irgi yra kintamasis, priklausantis nuo p. $f_n: x \to x^n$, $x \in (1; +\infty)$ apibūdina n laipsninių funkcijų, kurios apibrėžia indėlio dydžio po n metų priklausomybę nuo kaupiamojo daugiklio x bei konstantos K_0.

4.10. Rodiklinės funkcijos

Apibrėžimas

Funkcija $f: x \to a^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$ vadinama rodikline funkcija.

Pavyzdys. $f: x \to 2^x$, $x \in \boldsymbol{R}$.
Ši funkcija yra monotoniškai didėjanti ir apgręžiamoji. Ašis *Ox* yra grafiko asimptotė.
Rodiklinių funkcijų, kurių pagrindai yra kitokie, grafikai panašūs.



Gamtos moksluose ir technikoje ypač svarbi rodiklinė funkcija, kurios pagrindas *e*: $f(x) = e^x$, $D \subset \boldsymbol{R}$; čia e = 2,718281828... . Ši funkcija vadinama eksponentine funkcija.

Taikymai

Radioaktyvusis skilimas. Svarbus atomo fizikos dėsnis, apibūdinantis radioaktyviųjų medžiagų skilimą, nusakomas formule

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t};$$

čia N_0 – nesuskilusių radioaktyviosios medžiagos atomo branduolių kiekis laiko momentu t = 0,
N_t – nesuskilusių radioaktyviosios medžiagos atomo branduolių kiekis laiko momentu t,
λ – koeficientas, kuris yra charakteringoji radioaktyviosios medžiagos konstanta. Ji apibūdina skilimo greitį.

Pažymėję $\frac{N_t}{N_0} = y$ ir $e^{-\lambda} = a$ gauname rodiklinę funkciją $f: t \to a^t$, $t \in \boldsymbol{R}_0^+$.

Pavyzdys. Radioaktyviojo elemento aktinio-227 skilimą apibūdina funkcija $f(t)=0,969^t \Leftrightarrow \frac{N_t}{N_0}=0,969^t$; čia t – metų skaičius. Norėdami apskaičiuoti laiką, per kurį suskyla pusė atomo branduolių (šis laikas vadinamas puskiekio periodu), vietoj $\frac{N_t}{N_0}$ įrašome $\frac{1}{2}$ ir gauname lygtį

$$\frac{1}{2}=0,969^t \Leftrightarrow \lg\frac{1}{2}=\lg 0,969^t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg 0,969} \Leftrightarrow t=\frac{-0,30103}{-0,01368} \Leftrightarrow t=22.$$

Vadinasi, per 22 metus suskyla pusė pradiniu momentu buvusių branduolių.

Medienos kiekis. Pažymėję medienos kiekį pradiniu momentu B_0 (milijonais kietmetrių), jos kiekį po n metų B_n, metinį prieaugį p %, gauname sudėtinių procentų formulę (žr. p. 135): $B_n=B_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. Įrašę $\frac{B_n}{B_0}=y$ ir $1+\frac{p}{100}=q$, gauname rodiklinę funkciją $y=q^n$, $n\in \boldsymbol{R}_0^+$.

Pavyzdys. Miške, kuriame yra vienas milijonas kietmetrių medienos, metinis prieaugis lygus 3 %. Rodiklinė funkcija, apibūdinanti medienos kiekį po n metų, yra B_n = $1,03^n$. Po 5 metų B_5 = $1,03^5$ = 1,159 milijono kietmetrių, po 10 metų B_{10} = $1,03^{10}$ = 1,3439 milijono kietmetrių.

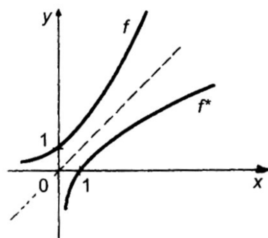
4.11. Logaritminės funkcijos

Apibrėžimas

Funkcija $f: x \to \log_a x,\ x\in \boldsymbol{R}^+,\ a\in \boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$ vadinama logaritmine funkcija.

Logaritminė funkcija yra atvirkštinė rodiklinei funkcijai $f : x \to a^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$.

Pavyzdys. $f : x \to 2^x$, $x \in \boldsymbol{R}$,
$f^* : x \to \log_2 x$, $x \in \boldsymbol{R}^+$.
Abi funkcijos yra monotoniškai didėjančios, ašis Ox yra funkcijos f grafiko horizontalioji asimptotė, ašis Oy – funkcijos f^* grafiko vertikalioji asimptotė.



Taikymai

Radioaktyvusis skilimas (žr. p. 136): $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$. Pažymėję $\frac{N_t}{N_0} = y$ ir $e^{-\lambda} = a$, gauname rodiklinę funkciją, apibūdinančią aktinio atomų skilimą. Atvirkščiai, norėdami iš šio sąryšio surasti laiką t, per kurį nesuskilusių aktinio atomų kiekis pasikeičia iš N_0 į N_t, susiduriame su logaritmine funkcija $f^* : t \to \log_a \frac{N_t}{N_0}$, apibrėžta aibėje $D = (0;\ 1]$.

Medienos kiekis (žr. p. 137): $B_n = B_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. Įrašę $\frac{B_n}{B_0} = y$ ir $1 + \frac{p}{100} = q$, gauname rodiklinę funkciją $y = q^n$, $n \in \boldsymbol{R}_0^+$. Norėdami surasti laiką, per kurį medienos kiekis nuo B_0 išauga iki B_n, vėl turime taikyti logaritminę funkciją $f^* : n \to \log_q \frac{B_n}{B_0}$, $D = (0;\ 1]$.

Pavyzdys. Per kiek metų medienos kiekis padvigubėja, jeigu metinis prieaugis lygus 2,7 %?

$$n = \log_{1,027}\frac{2}{1} \Leftrightarrow n = \frac{\lg 2}{\lg 1,027} \Leftrightarrow n \approx 26.$$

Medienos kiekis miške padvigubėja apytiksliai per 26 metus.

Sudėtiniai procentai (žr. p. 135 ir 5 skyrių). Pradinis indėlis K_0 buvo n metų laikomas banke, kurio metinių palūkanų norma lygi p. Kiekvienų metų pabaigoje indėlio procentai buvo prisumuojami prie jo. Po n metų indėlis pasidarė lygus $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = K_0q^n$. Norėdami sužinoti, per kiek metų indėlis nuo dydžio K_0 išaugo iki K_n, taikome logaritminę funkciją $f^* : y \to \log_q y,\ y \in [1;\ +\infty)$; čia $y = \frac{K_n}{K_0}$.

Pavyzdys. Per kiek laiko pradinis 10 000 € kapitalas išaugs iki 13 700 €, jeigu metinių palūkanų norma lygi 4 %?

$$n = \log_{1,04}\frac{13\,700}{10\,000} \Leftrightarrow n = \log_{1,04} 1,37 \Leftrightarrow n = \frac{\lg 1,37}{\lg 1,04},$$

$$n \approx 8 \ (\text{metai}).$$

4.12. Funkcijos, apibrėžiamos keliais reiškiniais

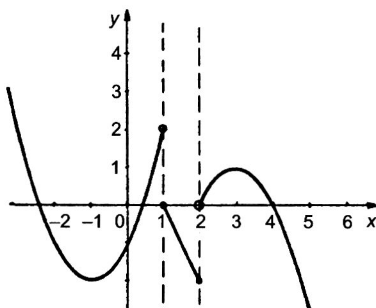
Funkcijos, kurių apibrėžimo sritis išskaidyta į dalis

Praktikoje (pavyzdžiui, elektrotechnikoje, informatikoje ir statistikoje) dažnai susiduriama su funkcijomis, kurias galima apibrėžti tik išskaidžius apibrėžimo sritį į dalis. Tada kiekvienoje tokioje dalyje funkcija apibūdinama vis kitu analiziniu reiškiniu.

Pavyzdžiai. $$f : x \to \begin{cases} x^2+2x-1, & \text{kai } x \in (-\infty;\ -1), \\ 2-2x, & \text{kai } x \in [-1;\ 2], \\ -x^2+6x-8, & \text{kai } x \in (2;\ +\infty). \end{cases}$$

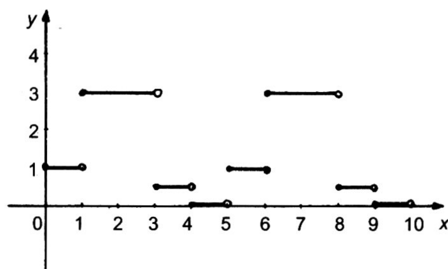
Norėdami nubraižyti funkcijos f grafiką, pirmiausia pertvarkome reiškinius:

$$f : x \to \begin{cases} (x+1)^2 - 2, & \text{kai } x \in (-\infty; -1), \\ 2 - 2x, & \text{kai } x \in [-1; 2], \\ 1 - (x-3)^2, & \text{kai } x \in (2; +\infty). \end{cases}$$



$$f : x \to \begin{cases} 0{,}5, & \text{kai } x \in [3; 4) \cup [8; 9), \\ 1, & \text{kai } x \in [0; 1) \cup [5; 6), \\ 3, & \text{kai } x \in [1; 3) \cup [6; 8), \\ 0, & \text{kai } x \in [4; 5) \cup [9; 10). \end{cases}$$

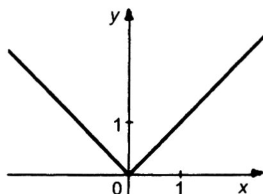
Brėžinyje pavaizduotų atkarpų kairieji galai (juodi rutuliukai) grafikui priklauso, dešinieji – nepriklauso, nes šiuose taškuose funkcija neapibrėžta.



Modulio funkcijos

Funkcija $f: x \to \lvert x \rvert,\ x \in \boldsymbol{R}$ vadinama modulio funkcija.

Modulio funkcijos grafiką sudaro dvi pustiesės, kurios yra pirmojo ir antrojo ketvirčių pusiaukampinės. Taške $x = 0$ grafikas persilenkia.



Modulio funkcijos pakeičiamos funkcijomis su išskaidytomis apibrėžimo sritimis. Tada nubraižomi jų grafikai.

Pavyzdys: $f: x \to x^2\lvert x \rvert - x\lvert x \rvert + 2,\ x \in \boldsymbol{R}$;

$$f: x \to \begin{cases} x^3 - x^2 + 2, & x \in \boldsymbol{R}_0^+, \\ -x^3 + x^2 + 2, & x \in \boldsymbol{R}^-. \end{cases}$$

Labai svarbi yra modulio funkcijų bei sveikųjų racionaliųjų funkcijų superpozicija.

Pavyzdys. $f: x \to \lvert x \rvert,\ x \in \boldsymbol{R},\ g: x \to x^2 - 4,\ x \in \boldsymbol{R}$.

Aibės $\boldsymbol{R}$ vaizdas, gautas atvaizdžiu g, yra aibė $g(\boldsymbol{R}) = [-4; \infty)$, kuri yra funkcijos f apibrėžimo srities poaibis, taigi galima apibrėžti funkciją $f \circ g$:

$f \circ g: x \to \lvert x^2 - 4 \rvert,\ x \in \boldsymbol{R}$, arba, išskaidžius apibrėžimo sritį į dalis:

$$f \circ g: x \to \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kai } x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty), \\ 4 - x^2, & \text{kai } x \in (-2; 2). \end{cases}$$

Aibės vaizdas, gautas atvaizdžiu f, yra aibė $f(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}_0^+$, kuri yra funkcijos g apibrėžimo srities poaibis, todėl galima apibrėžti ir funkciją $g \circ f$:

$g \circ f: x \to \lvert x \rvert^2 - 4,\ x \in \boldsymbol{R}$,

$\lvert x \rvert^2 - 4 = x^2 - 4 = g(x)$, todėl $g \circ f = g$.

Ženklo funkcija

Realiojo skaičiaus ženklu (lot. *signum*) laikomas toks sąryšis:

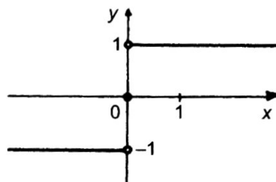
$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{kai } x > 0, \\ 0, & \text{kai } x = 0, \\ -1, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Funkcija sign x yra ženklo funkcija ir ji apibrėžiama taip:

$$f : x \rightarrow \operatorname{sign} x, \ x \in \boldsymbol{R}.$$

Ženklo funkcijos grafiką sudaro dvi pustiesės ir vienas taškas. Taškas $x = 0$ yra grafiko šuolio taškas.

Modulio ir ženklo funkcijas sieja sąryšis $|x| = x \cdot \operatorname{sign} x$.



Pavyzdys: $\operatorname{sign}(2x-3) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x > 1{,}5, \\ 0, & \text{kai } x = 1{,}5, \\ -1, & \text{kai } x < 1{,}5. \end{cases}$

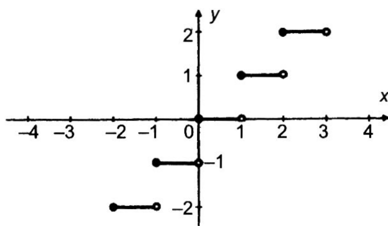
Sveikosios dalies funkcija

Realiojo skaičiaus x sveikąja dalimi vadinamas didžiausias sveikasis skaičius z, pasižymintis savybe $z \le x < z+1$. Žymima $z = [x]$.

Pavyzdžiai: $[-1{,}5] = -2$; $[3{,}6] = 3$; $[5] = 5$.

Funkcija $f : x \rightarrow [x]$, kai $x \in \boldsymbol{R}$, vadinama sveikosios dalies funkcija.

Šios funkcijos grafikas sudarytas iš atskirų atkarpų, išsidėsčiusių tarytum laiptų pakopos. Todėl ji dar vadinama laiptine funkcija.



4.13. Skaičių sekos

Sekos apibrėžimas

> Kai kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \in \boldsymbol{N}$ vienareikšmiškai priskiriamas realusis skaičius a_n, gaunama begalinė realiųjų skaičių seka, trumpiau tariant, seka:
>
> $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ arba trumpiau (a_n).
>
> Apsiribojęs tik n $(n \neq 0)$ pirmųjų natūraliųjų skaičių, gauname baigtinę seką, kurios pirmasis narys a_1, o paskutinis – a_n.

a_1 yra pirmasis sekos narys, a_2 – antrasis, a_n – n-tasis, dar vadinamas bendruoju sekos nariu. Skirtingai negu aibėje, tas pats sekos narys gali joje pasikartoti daug kartų. Daugelį sekų galima apibrėžti nurodant jų bendrojo nario analizinę išraišką.

> Kiekviena funkcija $f: n \to a_n$, $n \in \boldsymbol{N}$, $a_n \in \boldsymbol{R}$ yra begalinė skaičių seka.

Pavyzdžiai: $a_n = n^2 + 1$, seka: 2, 5, 10, 17, 26, ... ;

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}, \text{ seka: } 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{6}, \frac{11}{7}, \ldots$$

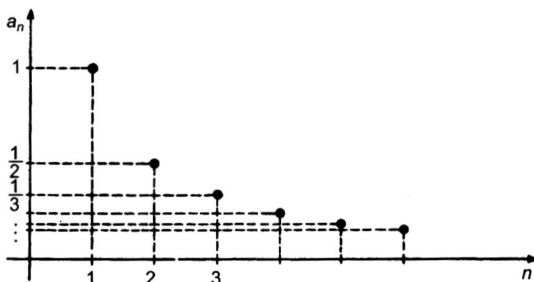
Sekos narius galima grafiškai pavaizduoti arba skaičių ašies, arba koordinačių sistemos taškais.

Pavyzdys. $f: n \to \frac{1}{n}$, $n \in N$ arba $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$.

Skaičių ašis:



Koordinačių sistema:



Aritmetinė progresija

Kai bet kurių dviejų vienas po kito einančių sekos narių skirtumas *d* yra pastovus, tokia seka vadinama aritmetine progresija.

(a_n) yra aritmetinė progresija, jeigu yra toks pastovus realusis skaičius *d*, su kuriuo $a_{n+1} - a_n = d$, kad ir koks būtų $n \in N$.

Skaičius *d* vadinamas aritmetinės progresijos skirtumu. Kai $d > 0$, progresija yra didėjanti, kai $d < 0$ – mažėjanti, o kai $d = 0$, seka yra pastovi. Iš trijų vienas po kito einančių aritmetinės progresijos narių vidurinysis yra gretimų sau narių aritmetinis vidurkis.

Aritmetinė progresija apibrėžiama bendruoju nariu:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pavyzdžiai. Didėjančiosios aritmetinės progresijos 3, 7, 11, 15, 19, ... $a_1 = 3$ ir $d = 4$. Jos bendrasis narys $a_n = 3 + (n-1)4$ arba $a_n = 4n - 1$.

Mažėjančiosios aritmetinės progresijos 10, 3, –4, –11, –18, ... $a_1 = 10$ ir $d = -7$. Jos bendrasis narys $a_n = 10 + (n-1)(-7) = 17 - 7n$.

Pirmųjų n aritmetinės progresijos narių suma

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Pavyzdys. Aritmetinės progresijos, nusakomos formule $a_n = 4n - 1$, pirmasis narys yra 3, 18-asis narys gaunamas iš bendrojo nario išraiškos ir yra lygus 71. Pirmųjų 18 narių suma $S_{18} = \frac{18}{2}(3 + 71) = 666$.

Kiekviena aritmetinė progresija, kurios bendrasis narys $a_n = a_1 + (n-1)d$, yra tiesinė funkcija. Šios funkcijos grafiko krypties koeficientas lygus d, o ašyje Oy atkertama atkarpa lygi $a_1 - d$: $f: n \to dn + a_1 - d,\ n \in \boldsymbol{N}$.

Geometrinė progresija

Kai bet kurių dviejų vienas po kito einančių sekos narių dalmuo q yra pastovus, seka vadinama geometrine progresija.

(a_n) yra geometrinė progresija, kai $a_1 \neq 0$ ir yra konstanta $q \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, su kuria $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kad ir koks būtų $n \in \boldsymbol{N}$.

Kai pirmasis geometrinės progresijos narys yra teigiamasis skaičius, skiriamos tokios progresijos:

$q \in (1;\ +\infty)$ – didėjančioji,
$q \in (0;\ 1)$ – mažėjančioji,

$q \in (-\infty; 0)$ – alternuojančioji,
$q = 1$ – pastovioji.

Iš bet kurių trijų vienas po kito einančių geometrinės progresijos narių vidurinysis narys yra kaimyninių narių geometrinis vidurkis.

Geometrinė progresija apibrėžiama bendruoju nariu: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Pavyzdžiai. Mažėjančiosios geometrinės progresijos $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ $a_1 = 3$ ir $q = \frac{1}{2}$. Jos bendrasis narys $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Alternuojančiosios geometrinės progresijos $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ $a_1 = 5$ ir $q = -\frac{1}{2}$. Jos bendrasis narys $a_n = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Pirmųjų n geometrinės progresijos narių suma

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Kai $q < 1$, labiau tinka pirmoji išraiška, o kai $q > 1$ – antroji.

Pavyzdys. Pirmųjų šešių geometrinės progresijos, nusakomos formule $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, narių suma yra:

$$S_n = \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 5{,}90625.$$

Kiekvieną geometrinę progresiją, kurios bendrasis narys

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n \Leftrightarrow \frac{a_n \cdot q}{a_1} = q^n,$$

galima laikyti rodikline funkcija su pastoviuoju daugikliu $\frac{a_1}{q}$ ir pagrindu q: $f: n \to \frac{a_1}{q} \cdot q^n$, $n \in N$.

Monotoninės sekos

Seka vadinama monotoniškai didėjančia, kai paskesnieji nariai yra ne mažesni už priešais einančius narius. Seka vadinama monotoniškai mažėjančia, kai paskesni nariai yra ne didesni už priešais esančius narius.

Monotoniškai didėjanti seka:	$n \in N \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$.
Griežtai monotoniškai didėjanti seka:	$n \in N \Rightarrow a_n < a_{n+1}$.
Monotoniškai mažėjanti seka:	$n \in N \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$.
Griežtai monotoniškai mažėjanti seka:	$n \in N \Rightarrow a_n > a_{n+1}$.

Aprėžtosios sekos

Seka (a_n) yra aprėžtoji, jeigu yra du realieji skaičiai s ir S, su kuriais iš $n \in N \Rightarrow s \leq a_n \leq S$.

s vadinamas apatiniu sekos rėžiu, S – viršutiniu.

Pavyzdys. Seka nusakoma formule $a_n = -\frac{1}{2^n}$, taigi seka $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ yra griežtai monotoniškai didėjanti. Bet kuris skaičius, mažesnis arba lygus –0,5, yra jos apatinis rėžis. Skaičius 0 arba bet kuris teigiamasis skaičius yra jos viršutinis rėžis. Mažiausias viršutinis rėžis yra 0, didžiausias apatinis rėžis yra –0,5.

4.14. Sekų ribos

Konverguojančiosios ir diverguojančiosios sekos

Seka a_n yra konverguojanti prie ribos $a \in \boldsymbol{R}$, kai bet kurios taško a aplinkos išorėje yra tik baigtinis sekos narių skaičius. Simboliais rašoma: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$. (Skaitoma: riba a_n, kai n artėja prie begalybės.) ($n \in \boldsymbol{N}$)

Pavyzdžiai. Seka, kurios bendrasis narys $a_n = \frac{1}{n}$, arba 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... konverguoja prie 0, taigi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Seka, kurios bendrasis narys $a_n = \frac{n}{n+1}$, arba $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ... konverguoja prie 1, taigi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Seka yra diverguojančioji, kai ji nėra konverguojančioji, t. y. nėra realiojo skaičiaus, kurio kiekvienos aplinkos išorėje būtų tik baigtinis sekos narių skaičius ($n \in \boldsymbol{N}$).

Pavyzdys. Seka, kurios bendrasis narys $a_n = n^2$, arba 1, 4, 9, 16, ... diverguoja, ji neturi ribos.

Seka (a_n) konverguoja prie ribos a, kai kiekvieną skaičių $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^+$ atitinka $n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$ ir toks, kad yra teisinga implikacija $n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Pavyzdys. Tarkime, nurodyta seka $a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$, kurios riba $a = \frac{2}{3}$. Parinkime ε = 0,01 ir raskime jį atitinkantį sekos nario numerį n_ε.

$$\left|\frac{2n+1}{3n-1}-\frac{2}{3}\right|<0{,}01 \Leftrightarrow \left|\frac{3(2n+1)-2(3n-1)}{3(3n-1)}\right|<0{,}01 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{6n+3-6n+2}{3(3n-1)}\right|<0{,}01 \Leftrightarrow \frac{5}{3(3n-1)}<0{,}01 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5<0{,}03(3n-1) \Leftrightarrow 5{,}03<0{,}09n \Rightarrow n>55{,}89.$$

Su visais sekos nariais, kai $n_\varepsilon = 56$, teisinga implikacija $n>n_\varepsilon \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$. Kai ε reikšmės yra vis mažesnės, n_ε reikšmės yra vis didesnės.

Konverguojančiosios sekos riba yra vienareikšmiškai apibrėžta. Kiekviena konverguojančioji seka yra aprėžtoji. Kiekviena monotoninė ir aprėžtoji seka konverguoja.

Svarbios ribos

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$, kai $a \in \boldsymbol{R}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, kai $|a|<1$.

Sekos, kurių riba lygi 0, vadinamos nykstamosiomis sekomis.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, kai $a \in \boldsymbol{R}^+$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-1}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{e^k} = e^{-k}$.

e yra Oilerio skaičius, $e \approx 2{,}71828...$

4.15. Eilutės

Sumos ženklas

Sekos (a_n) n pirmųjų narių suma žymima simboliu $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

(Skaitoma: visų a_k suma, kai k kinta nuo 1 iki n, $n \in \boldsymbol{N}$.)

Simbolis $\sum$ vadinamas sumos ženklu ir pasižymi tokiomis savybėmis:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k;$$

$$\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k;$$

$$\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1;\ \sum_{k=1}^{n}c=nc.$$

Pavyzdžiai: $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\ldots+n;$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=-1+1-1+1-1+\ldots+(-1)^n;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2^k}=3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Eilutės

Sudėjus visus sekos (a_n) narius, gaunama begalinė eilutė $a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, atitinkanti seką (a_n).

Norėdami išsiaiškinti, ar begalinė eilutė turi baigtinę sumą, sudarykime dalinių sumų S_n seką:

$S_1=a_1,$

$S_2=a_1+a_2,$

$S_3=a_1+a_2+a_3,$

....

$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n.$

Jeigu dalinių sumų seka (S_n) konverguoja prie ribos S, tai begalinė eilutė $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ turi sumą S.

Kitu atveju, kai begalinė eilutė neturi sumos, ji yra diverguojančioji.

Geometrinė eilutė

Sudėjus visus geometrinės progresijos narius, gaunama geometrinė eilutė: $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1q^{k-1}$. Šios eilutės dalinių sumų seka nusakoma bendruoju nariu $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1q^{k-1} = \lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ kai } |q| < 1.$$

Geometrinės eilutės konvergavimas priklauso nuo q.

Pavyzdžiai. Eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^k}$ yra geometrinė eilutė, kurios $a_1 = q = \dfrac{1}{3}$, todėl ji konverguoja. Jos suma $S = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

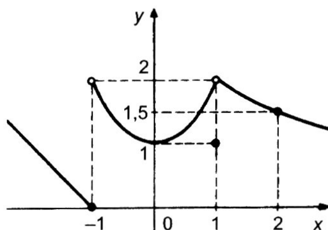
Eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} 1{,}5^k$ yra geometrinė eilutė, kurios $a_1 = q = 1{,}5$, todėl ji diverguoja ir neturi sumos.

4.16. Funkcijų ribos

Įvadas

Tarkime, kad nurodyta funkcija, kuri skirtinguose intervaluose, vienas nuo kito atskirtuose taškais $x = -1$ ir $x = 1$, apibrėžta skirtingais reiškiniais.

$$f : x \to \begin{cases} -x - 1, & \text{kai } x \in (-\infty; -1), \\ x^2 + 1, & \text{kai } x \in (-1; 1), \\ 1, & \text{kai } x = 1, \\ \dfrac{1}{x} + 1, & \text{kai } x \in (-1; +\infty). \end{cases}$$



Taške $x = -1$ funkcijos grafikas nutrūksta (daro šuolį), šiame taške funkcija nėra tolydi. Kai argumento reikšmės artėja prie šio taško iš kairės, funkcijos reikšmės artėja prie reikšmės $f(-1) = 0$. Kai argumento reikšmės artėja prie šio taško iš dešinės, funkcijos reikšmės artėja prie ribos, lygios 2 (bet ji nėra funkcijos reikšmė).

Taške $x = 1$ funkcijos grafikas taip pat nutrūksta, taigi funkcija šiame taške irgi nėra tolydi. Artėjant prie šio taško tiek iš kairės, tiek ir iš dešinės egzistuoja viena riba, lygi 2, tačiau ši riba nėra lygi funkcijos reikšmei. Funkcijos išraiškoje nurodyta, kad $f(1) = 1$. Taške $x = 1$ funkcijos reikšmės šokinėja nuo 2 iki 1 ir atgal.

Kituose taškuose grafikas nenutrūksta (pavyzdžiui, taške $x = 2$), funkcija yra tolydi. Funkcijos riba ir jos reikšmė sutampa.

Funkcijos ribos

> Funkcija $f(x),\ x \in D_f$ taške x_0 turi ribą iš kairės $a_k = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, kai bet kurią seką (x_n), kurios nariai yra į kairę nuo x_0, atitinka funkcijos reikšmių seka $(f(x_n))$, konverguojanti prie a_k.
>
> Analogiškai apibrėžiama ir riba iš dešinės $a_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Gali egzistuoti abi ribos. Kai jų abiejų reikšmės yra skirtingos arba bent viena jų neegzistuoja, tai neegzistuoja ir riba $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Kitas dažnai vartojamas funkcijos f ribos taške x_0 apibrėžimas skamba taip: $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, jeigu kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$, kad iš sąlygos $x \in D_f \wedge |x - x_0| < \delta$ išplaukia $|f(x) - a| < \varepsilon$. Kai artėjama iš dešinės, tai $0 < x - x_0 < \delta$, o kai iš kairės, tai $0 < x_0 - x < \delta$.

Funkcija f turi ribą a, kai nepriklausomasis kintamasis x neaprėžtai didėja, jeigu kiekvieną seką (x_n), kurios nariai artėja prie $+\infty$, atitinka funkcijos reikšmių seka $(f(x_n))$, konverguojanti prie a, $a = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Analogiškai apibrėžiama funkcijos riba, kai nepriklausomasis kintamasis x neaprėžtai mažėja. Rašoma: $a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Pavyzdžiai: $\lim\limits_{x \to 1}(2x^3 + 2x) = 4;$ $\quad x_n = 1 + \frac{1}{n};$

$$f : x \to \begin{cases} 3x, & x \in (-\infty; 2), \\ x^2, & x \in [2; +\infty). \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} 3x = 6, \ \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} x^2 = 4, \ \lim_{x \to 2} f(x) \text{ neegzistuoja.}$$

$$f : x \to \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \ x \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}.$$

Taške $x = 1$ funkcija neturi reikšmės, tačiau ribą galima apskaičiuoti:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

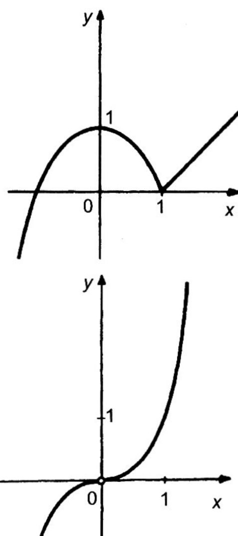
Funkcijos reiškinys prieš apskaičiuojant ribą suprastinamas.

Tolydumas taške

Funkcija f vadinama tolydžia taške x_0, kai egzistuoja riba $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ir ši riba yra lygi funkcijos reikšmei $f(x_0)$. f nėra tolydi taške x_0, kai riba šiame taške neegzistuoja arba egzistuoja, bet nėra lygi $f(x_0)$:

$$f \text{ tolydi taške } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Pavyzdžiai. $f : x \to \begin{cases} 1-x^2, \text{ kai } x \in (-\infty;\ 1], \\ x-1, \text{ kai } x \in (1;\ +\infty); \end{cases}$



$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x^2)=0,\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)=0.$

Funkcijos riba taške $x = 1$ lygi 0.

$f(1)=1-1^2=0.$

Funkcija yra tolydi taške $x = 1$.

$f : x \to \begin{cases} x^3, \text{ kai } x \neq 0, \\ 1, \text{ kai } x = 0. \end{cases}$

f nėra tolydi taške $x = 0$, nes $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, bet $f(0) = 1$.

Tolydumas intervale

> Funkcija $f : x \to f(x),\ x \in D_f$ vadinama tolydžia intervale $(a;\ b) \in D_f$, jeigu ji yra tolydi kiekviename to intervalo taške $x \in (a;\ b)$.

Pavyzdžiai. $f : x \to x^2 - 2x + 2$, kai $x \in \boldsymbol{R}$.

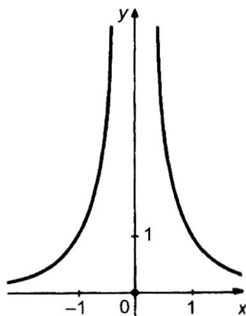
f yra tolydi aibėje $\boldsymbol{R}$, nes bet kuriame taške $x_0 \in \boldsymbol{R}$ jos reikšmė

$f(x_0)=x_0^2-2x_0+2$

ir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0^2-2x_0+2.$

$f : x \to \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, \text{ kai } x \neq 0, \\ 0, \text{ kai } x = 0. \end{cases}$

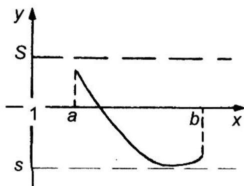
f nėra tolydi taške $x = 0$, nes ji šiame taške neturi ribos. Priešingai, f yra tolydi uždarajame intervale [0,5; 10].



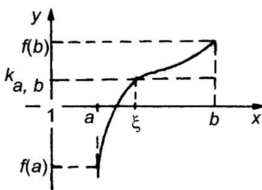
Tolydžių uždarajame intervale funkcijų savybės

Tolydi uždarajame intervale $[a; b]$ funkcija šiame intervale yra aprėžta.

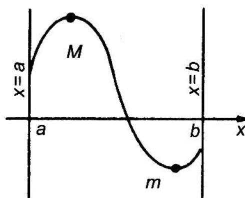
Vadinasi, yra du skaičiai s ir S, su kuriais $s \le f(x) \le S$, kad ir kokie būtų realieji $x \in [a; b]$.



Tolydi uždarajame intervale $[a; b]$ funkcija bent vieną kartą įgyja kiekvieną reikšmę k_{ab}, esančią tarp $f(a)$ ir $f(b)$ (tarpinės reikšmės teorema).



Tolydi uždarajame intervale $[a; b]$ funkcija pasiekia šiame intervale savo mažiausią reikšmę m ir savo didžiausią reikšmę M (teorema apie mažiausią ir didžiausią reikšmę).



4.17. Asimptotės

Vertikaliosios asimptotės

Kai x_P yra trupmeninės racionaliosios funkcijos $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ polius, tai $x = x_P$ yra vertikaliosios asimptotės lygtis.

Pavyzdys. $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2 - 16)(x+3)}$. Vardiklio nuliai, taigi $f(x)$ poliai, yra –4, 3, 4.

Vertikaliųjų asimptočių lygtys tokios: $x = -4, x = 3, x = 4$.

Horizontaliosios asimptotės

Tarkime, nurodyta trupmeninė racionalioji funkcija $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$. Skiriami tokie atvejai:

kai $p(x)$ laipsnis yra mažesnis už $q(x)$ laipsnį, tai $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=0$ ir $y = 0$ (ašis Ox) yra horizontalioji asimptotė;

kai $p(x)$ laipsnis yra lygus $q(x)$ laipsniui, tai $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=c$ ir $y = c$ yra horizontalioji asimptotė.

Pavyzdys. $f(x)=\frac{3x}{2-x}=\frac{3}{\frac{2}{x}-1}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{\frac{2}{x}-1}=-3.$

$y = -3$ yra horizontalioji asimptotė.

Pasvirosios asimptotės

Pasviroji asimptotė egzistuoja tada, kai $p(x)$ laipsnio rodiklis yra vienetu didesnis už $q(x)$ laipsnio rodiklį. $g(x)$ yra pasviroji asimptotė, kai $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))=0.$

Pavyzdys. $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x-1}=x+3+\frac{5}{x-1}$ (toks rezultatas gautas skaitiklį padalijus iš vardiklio);

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x+3+\frac{5}{x-1}-(x+3)\right)=0.$ Atstumas nuo f grafiko taškų iki tiesės $y = x + 3$ didėjant x reikšmėms mažėja, taigi $g(x) = x + 3$ yra pasviroji asimptotė.

5. Finansų matematika

5.1. Procentų skaičiavimas

Metiniai procentai

Įnešus į banką K dydžio indėlį, jis po metų padidėja, nes bankas prisumuoja metines palūkanas Z, kurios apskaičiuojamos atsižvelgiant į metinių palūkanų normą p pagal formulę:

metinės palūkanos
$$Z = K \cdot \frac{p}{100} = \frac{K \cdot p}{100}.$$

Pavyzdys. Metinių palūkanų norma 4 %. Per metus 15 000 € indėlis padidėjo dydžiu $Z = \frac{15000 \cdot 4}{100} € = 600 €$.

Kai žinoma palūkanų norma ir metinės palūkanos, pradinė indėlio reikšmė K surandama iš metinių palūkanų formulės:

indėlis
$$K = \frac{Z \cdot 100}{p}.$$

Pavyzdys. Metinių palūkanų norma lygi 5,5 %. Koks buvo pradinis indėlis, jei po metų priskaičiuota 467,50 € metinių palūkanų?

$$K = \frac{467{,}5 \cdot 100}{5{,}5} € = 8500 €.$$

Kai žinomas pradinis indėlis ir metinės palūkanos, metinių palūkanų norma surandama iš metinių palūkanų formulės:

$$p = \frac{Z \cdot 100}{K}.$$

Pavyzdys. Kokia buvo metinių palūkanų norma, jeigu po metų prie 11 500 € indėlio prisumuota 517,50 € metinių palūkanų?

$$p = \frac{517{,}5 € \cdot 100}{11500 €} = 4{,}5 \%.$$

Mėnesinės ir dieninės palūkanos

Jeigu palūkanos priskaičiuojamos po M mėnesių, tai palūkanų formulė pertvarkoma į tokią:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot M}{100 \cdot 12}.$$

Pavyzdys. Palūkanos, tenkančios 9500 € indėliui, buvo priskaičiuotos po 20 mėnesių. Kai metinių palūkanų norma lygi 5 %, palūkanų dydis yra

$$Z = \frac{9500 \cdot 5 \cdot 20}{100 \cdot 12} \text{ €} = 791{,}67 \text{ €}.$$

Jeigu palūkanos priskaičiuojamos po T dienų, palūkanų formulė pertvarkoma į tokią:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot T}{100 \cdot 360}.$$

Pavyzdys. 25 000 € indėlis buvo laikomas banke 142 dienas. Kai metinių palūkanų norma lygi 6,5 %, palūkanų dydis yra

$$Z = \frac{25000 \cdot 6 \cdot 142}{100 \cdot 360} \text{ €} = 640{,}97 \text{ €}.$$

5.2. Sudėtiniai procentai

Pradinis kapitalas K_0 buvo laikomas banke n metų. Kiekvienų metų gale prie esamo kapitalo buvo prisumuojamos metinės palūkanos, apskaičiuotos atsižvelgiant į metinių palūkanų normą p. Po vienerių metų kapitalas išaugo iki $K_1 = K_0 + \frac{K_0 \cdot p}{100} = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Po dvejų metų kapitalo dydis buvo lygus

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 \cdot p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Po n metų kapitalas išaugs (sudėtinių procentų formulė) iki

po n metų:

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Reiškinys $q = 1 + \frac{p}{100}$ vadinamas kaupiamuoju daugikliu. Panaudojus jį, sudėtinių procentų formulė užrašoma papraščiau: $K_n = K_0 \cdot q^n$.

Pavyzdžiai. Banko metinių palūkanų norma yra 6,5 %. 10 000 € kapitalas buvo laikomas banke 15 metų. Per tą laiką jis išaugo iki 25 718,41 €:

$$K_n = 10000 \cdot \left(1 + \frac{6,5}{100}\right)^{15} € = 10000 \cdot 1,065^{15} € = 25718,41 €.$$

Kiek laiko reikia banke laikyti 10 000 € indėlį, kad jis padidėtų iki 18 000 €, jeigu metinių palūkanų norma 6,5 %?

$$18000 € = 10000 \cdot \left(1 + \frac{6,5}{100}\right)^{n} € \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,8 = 1,065^n \Leftrightarrow n \cdot \lg 1,065 = \lg 1,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\lg 1,8}{\lg 1,065} \Leftrightarrow n = 9,333.$$

Indėlį reikia laikyti 10 metų.

Kokia yra metinių palūkanų norma, jeigu per penkerius metus 10 000 € indėlis išaugo iki 14 000 €?

$$14000 € = 10000 € \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{5} \Leftrightarrow 1,4 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{1,4} = 1 + \frac{p}{100} \Leftrightarrow 1,0696 = 1 + \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = 6,96.$$

Metinių palūkanų norma yra 7 %.

5.3. Amortizacija

Apibrėžimas

Įrenginių amortizacija įvertinama jų vertės sumažėjimo dydžiais. Įrenginio pradinė vertė A per n metų sumažėja iki reikšmės B_n, kuri apskaičiuojama kiekvienų metų pabaigoje atsižvelgiant į amortizacijos normą p ir prieš tai buvusią likutinę įrenginio vertę. Vertė B_n vadinama balansine įrenginio verte. Jos reikšmė po vienerių metų yra

$$B_1 = A\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Balansinė vertė po n metų:

$$B_n = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^n.$$

Pavyzdys. Įrenginys, kurio pradinė vertė 80000 €, buvo naudotas 10 metų. Apskaičiuokime jo balansinę vertę, kai amortizacijos norma lygi 20 %.

$$B_{10} = 80000\cdot\left(1-\frac{20}{100}\right)^{10} € = 8589{,}93\ €.$$

Metalo laužo vertė

Įrenginio tarnavimo laikotarpio gale likutinė vertė vadinama likvidacine verte arba metalo laužo verte. Jeigu įrenginys buvo naudotas t metų, jo metalo laužo vertė S apskaičiuojama pagal formulę

metalo laužo vertė:

$$S = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^t.$$

Kai yra trys amortizacijos normos p_1, p_2, p_3 ir jas atitinkantys įrenginio eksploatavimo laikai n_1, n_2, n_3 metalo laužo vertė apskaičiuojama pagal formulę:

$$S = A\cdot\left(1-\frac{p_1}{100}\right)^{n_1}\cdot\left(1-\frac{p_2}{100}\right)^{n_2}\cdot\left(1-\frac{p_3}{100}\right)^{n_3}.$$

Pavyzdžiai. Per pirmąjį eksploatavimo laikotarpį įrenginio amortizacijos norma buvo 15 %, per dvigubai ilgesnį antrąjį laikotarpį – 20 % ir pagaliau per trečiąjį, trigubai ilgesnį nei pirmasis laikotarpis – 25 %. Pradinė įrenginio vertė buvo 1 milijonas €, o jo metalo laužo vertė lygi 52 000 €. Per kiek laiko nuvertėjo įrenginys?

Tarkime, kad n – pirmojo laikotarpio ilgis, tada įrenginio eksploatavimo laikas $t = n + 2n + 3n$:

$$52000 = 10^6 \cdot \left(1-\frac{15}{100}\right)^n \cdot \left(1-\frac{20}{100}\right)^{2n} \cdot \left(1-\frac{25}{100}\right)^{3n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 52 = 10^3 \cdot 0,85^n \cdot 0,8^{2n} \cdot 0,75^{3n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lg 52 = 3 \cdot \lg 10 + n \cdot \lg 0,85 + 2n \cdot \lg 0,8 + 3n \cdot \lg 0,75,$$

$n \approx 2$. Vadinasi, įrenginio eksploatavimo laikas 12 metų. Išnagrinėkime, kokia turi būti pastovi amortizacijos norma, kad tokia pat įrenginio metalo laužo vertė būtų pasiekta per tokį pat laiką.

$$52000 = 10^6 \cdot \left(1-\frac{p}{100}\right)^{12} \Leftrightarrow 0,052 = \left(1-\frac{p}{100}\right)^{12} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-\frac{p}{100} = \sqrt[12]{0,052} \Leftrightarrow 1-\frac{p}{100} = 0,7816 \Leftrightarrow p = 22.$$

Įrenginio pradinė vertė 80000 €, jo amortizacijos norma 18 %. Įrenginys naudotas 10 metų. Apskaičiuokime jo likutinę vertę po kiekvienų eksploatavimo metų.
Panaudoję formulę $B_n = 80000 \cdot 0,82^n$ € ($B_0 = 80000$) randame

$B_1 = 65600$ €, $B_6 = 24320$ €,

$B_2 = 53792$ €, $B_7 = 19943$ €,

$B_3 = 44109$ €, $B_8 = 16353$ €,

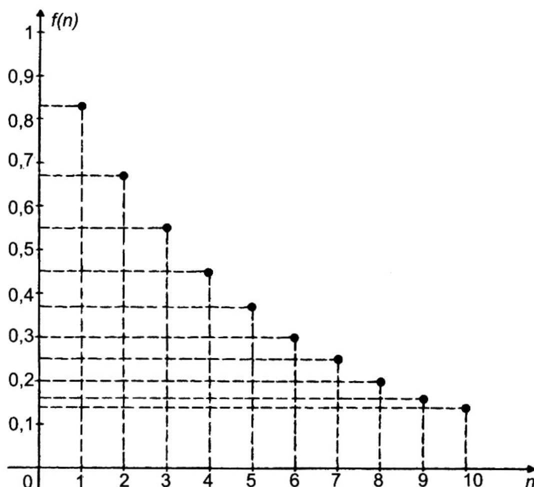
$B_4 = 36170$ €, $B_9 = 13409$ €,

$B_5 = 29659$ €, $B_{10} = 11000$ €.

Pažymėję $\frac{B_n}{80000} = f(n)$, galime apibrėžti funkciją

$f: n \to 0,82^n,\ n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 10\}$.

Funkcijos grafikas:



Galima apskaičiuoti, po kiek metų likutinė įrenginio vertė pasidarys lygi 1 €.

$1€ = 80\,000\ €\cdot 0{,}82^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lg 1 = \lg 80\,000 + n\cdot \lg 0{,}82 \Leftrightarrow 0 = 4{,}903 + n(-0{,}086) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{4{,}903}{0{,}086} \Rightarrow n \approx 57.$

Po 57 metų įrenginys bus visiškai nuvertėjęs.

Sumažinta degresija

Pridėjus prie pradinės įrenginio vertės ir prie metalo laužo vertės tą patį pastovų dydį B nors ir nepasikeičia amortizacijos sumos, tačiau sumažinama degresija, taigi sumažinamas santykis tarp kasmetinės amortizacijos sumos pirmaisiais ir paskutiniaisiais metais. Amortizacijos formulė šiuo atveju yra tokia:

sumažinta degresija $$S + B = (A + B)\cdot\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

Pavyzdys. Kaip pakinta amortizacijos norma, kai prie pradinės vertės 80000 € ir metalo laužo vertės 11 000 €, norint sumažinti degresiją, pridedama 50000 € suma?

$$61000\ € = 130000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{61}{130} = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1 - \frac{p}{100} = \sqrt[10]{\frac{61}{130}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{p}{100} = 0,9271 \Leftrightarrow p = 7,29.$$

5.4. Rentos

Apibrėžimai

Pastovi pinigų suma r, kuri kas vienodus laiko tarpus (ilgiausiai kas vienerius metus) įnešama arba išmokama, vadinama renta.

Kai kaupiamasis daugiklis lygus q, tai pirmoji įmoka r dėl sudėtinių procentų n-tųjų metų gale bus padidėjusi iki sumos $r \cdot q^{n-1}$. Antroji įmoka, įskaitoma antrųjų metų gale, n-tųjų metų gale bus išaugusi iki sumos $r \cdot q^{n-2}$. Įmoka, įskaitoma n-tųjų metų gale, nebus padidėjusi iš viso.

Sumos $r \cdot q^{n-1}$, $r \cdot q^{n-2}$, $r \cdot q^{n-3}$, ..., $r \cdot q$, r sudaro baigtinę geometrinę progresiją. Galutinė suma S_n, kuri susidaro mokant rentą n metų, apskaičiuojama pagal geometrinės progresijos sumos formulę.

Galutinė rentos reikšmė po n metų:

$$S_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pavyzdys. Indėlininkas per 10 metų kasmet į savo sąskaitą įnešdavo po 2400 €. Jam buvo priskaičiuojamos palūkanos, kurių norma 5,5 %. 10-ųjų metų gale jo sąskaitoje buvo

$$S_{10} = 2400\ € \cdot \frac{1,055^{10} - 1}{1,055 - 1} = 2400\ € \cdot 12,875,$$

$$S_{10} = 30900,85\ €.$$

Kapitalo kaupimas

Jeigu per tą laiką, per kurį mokama renta, banke dar buvo laikomas indėlis, kurio pradinis dydis K_0, tai bendra po n metų sukaupta suma B_n yra lygi

po n metų sukauptas kapitalas $$B_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pavyzdys. Indėlininkas įnešė į banką 10 000 €. Šešerius metus į tą pačią sąskaitą jam būdavo pervedama kasmetinė 3600 € renta. Banko metinių palūkanų norma 5 %. Po šešerių metų sukaupta suma yra tokia:

$$B_n = 10000 \cdot 1{,}05^6 \text{ €} + 3600 \cdot \frac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1} \text{ €} = 37888 \text{ €}.$$

Kapitalo mažėjimas

Tarkime, kad į sąskaitą banke įneštas indėlis K_0. Per n metų iš šios sąskaitos kasmet buvo išmokama renta, lygi r. Likusi indėlio suma E_n yra tokia:

po n metų likęs indėlis $$E_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Su tikru kapitalo mažėjimu susiduriama, kai renta yra didesnė už kasmet prie K_0 priskaičiuojamas palūkanas, taigi, kai

$$r > K_0 \cdot \frac{p}{100} \Leftrightarrow r > (q-1)K_0.$$

Kai $r = (q-1)K_0$, sukaupta kapitalo dalis sutampa su išmokama renta, vadinasi, galima kalbėti apie amžinąją rentą.

Pavyzdys. Kokio didumo sumą galima išmokėti kasmet, nuskaičiuojant nuo 150 000 € sąskaitos, prie kurios priskaičiuojamos 4,5 % metinės palūkanos, kad renta būtų amžina?

$$r = (1{,}045 - 1) \cdot 150000 \text{ €} = 0{,}0045 \cdot 150000 \text{ €} = 6750 \text{ €}.$$

5.5. Paskolos grąžinimas

Kai per n metų visa sukaupta suma išmokama rentai, susiduriame su ypatingu kapitalo mažėjimo atveju, kuris vadinamas paskolos grąžinimu.

$$E_n = 0 \Rightarrow 0 = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Paskolos grąžinimo formulė:
$$\boxed{K_0 \cdot q^n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.}$$

Pavyzdys. 75 776 € paskola turi būti grąžinta per 12 metų. Kokia turi būti kasmetinė išmoka, jei paskola suteikta su 6,5 % palūkanų norma?

$$75\,776 \cdot 1{,}065^{12} = r \cdot \frac{1{,}065^{12} - 1}{0{,}065} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 161334{,}40 = r \cdot 17{,}37 \Leftrightarrow r = 9288.$$

Kasmetinė išmoka lygi 9288 €.

Kaip pakistų paskolos grąžinimo laikas, jeigu skolininkas kasmet galėtų išmokėti tik 6000 €?

$$75\,776 \cdot 1{,}065^n = 6000 \cdot \frac{1{,}065^n - 1}{0{,}065} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 75\,776 \cdot 1{,}065^n = \frac{6000}{0{,}065} \cdot \left(1{,}065^n - 1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 75\,776 \cdot 1{,}065^n = 92\,308 \cdot \left(1{,}065^n - 1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 75\,776 \cdot 1{,}065^n = 92\,308 \cdot 1{,}065^n - 92\,308 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1{,}065^n \cdot (92\,308 - 75\,776) = 92\,308 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1{,}065^n \cdot 16\,532 = 92\,308 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n \cdot \lg 1{,}065 + \lg 16\,532 = \lg 92\,308 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4{,}96524 = 4{,}21833 + n \cdot 0{,}02735 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}74691 = n \cdot 0{,}02735 \Rightarrow n \approx 27{,}3.$$

Šį kartą paskolai grąžinti prireiktų 28 metų.

6. Skaičiavimo sistemos

6.1. Dešimtainė sistema

Dešimtainėje sistemoje yra dešimt skirtingų skaitmenų 0; 1; 2; 3; ...; 9, kuriais galima užrašyti visus natūraliuosius skaičius. Skaičius užrašomas kaip skaitmenų seka, skaitmens vertė priklauso nuo jo vietos skaitmenų sekoje. Kiekvienai vietai priskiriamas apibrėžtas dešimties laipsnis.

Skaitmenų sekos konstravimas

...	4-oji vieta	3-ioji vieta	2-oji vieta	1-oji vieta	Vieta iš dešinės į kairę
...	10^3	10^2	10^1	10^0	dešimties laipsnis
...	tūkstančiai	šimtai	dešimtys	vienetai	pavadinimas
...	9	6	0	3	pavyzdys

Skaičių 9603 sudaro 9 tūkstančiai, 6 šimtai, 0 dešimčių ir trys vienetai. Skaičiaus didumas jo skaitmenimis išreiškiamas taip:

$$9603 = 9 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Dešimčių laipsniai vadinami dešimtainės sistemos pagrindo laipsniais. Panašiai galima išreikšti dešimtainį skaičių ir tada, kai jo pagrindo laipsnių rodikliai neigiami.

Pavyzdžiai: $0{,}504 = 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$;

$$126{,}37 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}.$$

6.2. Dvejetainė sistema

Dvejetainėje sistemoje yra du skaitmenys 0 ir 1, kuriais galima išreikšti visus natūraliuosius skaičius. Dvejetainis skaičius užrašomas

skaitmenų seka, kurioje kiekvienai skaitmens vietai priskiriamas apibrėžtas dvejeto laipsnis. Tokio pat didumo skaičius dvejetainėje sistemoje užrašomas ilgesniu reiškiniu negu dešimtainėje sistemoje.

Skaitmenų sekos konstravimas

...	4-oji vieta	3-ioji vieta	2-oji vieta	1-oji vieta	Vieta iš dešinės į kairę
...	2^3	2^2	2^1	2^0	dvejeto laipsnis
...	aštuonetai	ketvertai	dvejetai	vienetai	pavadinimas
...	1	1	0	1	pavyzdys

Skaičių 1101 sudaro 1 aštuonetas, 1 ketvertas, 0 dvejetų ir 1 vienetas. Skaičiaus didumas jo skaitmenimis išreiškiamas taip:

$$1101 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Dvejetainių skaičių išreiškimas dešimtainiais skaičiais

Kadangi dvejetainėje skaičiavimo sistemoje vartojami tik du skaitmenys, tai dvejetų laipsniai išlieka tik ten, kur parašytas 1, ir iškrenta ten, kur parašytas 0. Taigi norint dvejetainį skaičių išreikšti dešimtainiu reikia sudėti esamus dvejetų laipsnius.

Pavyzdys. Dvejetainis skaičius 1100101 dešimtainiu išreiškiamas taip:

$$1100101 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 4 + 1 = 101.$$

Dešimtainių skaičių išreiškimas dvejetainiais skaičiais

Dešimtainius skaičius išreiškiant dvejetainiais verta naudotis tokia dvejetų laipsnių lentele:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...

Pirmiausia išskiriamas didžiausias dvejeto laipsnis, telpantis dešimtainiame skaičiuje, po to vėl išskiriamas didžiausias dvejeto laipsnis, telpantis liekanoje, ir t. t.

Pavyzdžiai. 39 parašykime dvejetainėje sistemoje.
$39 = 1 \cdot 2^5$, liekana 7;
$7 = 1 \cdot 2^2$, liekana 3;
$3 = 1 \cdot 2^1$, liekana 1;
$1 = 1 \cdot 2^0$.

Vadinasi, $39 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$:100111.

120 išreikškime dvejetainiu skaičiumi.
$120 = 1 \cdot 2^6$, liekana 56;
$56 = 1 \cdot 2^5$, liekana 24;
$24 = 1 \cdot 2^4$, liekana 8;
$8 = 1 \cdot 2^3$.

Vadinasi, $120 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3$:1111000.

Sudėtis ir atimtis

Paprasčiausi sudėties ir atimties dvejetainėje sistemoje atvejai yra šie:

$0 + 0 = 0$;	$0 - 0 = 0$;
$1 + 0 = 1$;	$1 - 0 = 1$;
$0 + 1 = 0$;	$1 - 1 = 0$;
$1 + 1 = 10$;	$10 - 1 = 1$.

Pavyzdys. 27 ir 23 sudėkime ir atimkime dvejetainėje sistemoje:
$27 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$:11011,
$23 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$:10111.

Sudėtis:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ +\quad 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

Atskirų stulpelių (iš dešinės) sudėties paaiškinimas:

1 stulpelis: 1 + 1 = 10 (1 perkeliamas),

2 stulpelis: 1 + 1 + 1 = 11 (1 perkeliamas),

3 stulpelis: 1 + 1 = 10 (1 perkeliamas),

4 stulpelis: 1 + 1 = 10 (1 perkeliamas),

5 stulpelis: 1 + 1 + 1 = 11.

Patikrinimas: 110010: $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 = 50 = 27 + 23$.

Atimtis:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{array}$$

Atskirų stulpelių (iš dešinės) atimties paaiškinimas:

1 stulpelis: 1 – 1 = 0,

2 stulpelis: 1 – 1 = 0,

3 stulpelis: 10 – 1 = 0 (1 perkeliamas iš 4 stulpelio),

4 stulpelis: 0 – 0 = 0,

5 stulpelis: 1 – 1 = 0.

Patikrinimas: 100: $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 = 27 - 23$.

Daugyba ir dalyba

Daugybai ir dalybai būdingos tokios skaičiavimo taisyklės:

$0 \cdot 0 = 0$;	$0 : 1 = 0$;
$1 \cdot 0 = 0$;	$1 : 1 = 1$;
$0 \cdot 1 = 0$;	$10 : 1 = 10$;
$1 \cdot 1 = 1$;	$1 : 0 =$ – neapibrėžta.

Be to, $10 \cdot 10 = 100$.

Pavyzdžiai. Apskaičiuokime sandaugą $9 \cdot 13$, kai daugikliai išreikšti dvejetainiais skaičiais.

$9 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$:1001,

$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$:1101.

$$\begin{array}{r} 1001 \cdot 1101 \\ \hline 1001 \\ 10010 \\ 1001 \\ \hline 1110101 \end{array}$$

Skaičiai sudauginti dvejetainėje sistemoje.

Patikrinimas: 1110101: $1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 117 = 9 \cdot 13.$

Raskime 72 : 24 dvejetainėje sistemoje.

$72 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 +$
$+ 0 \cdot 2^0$: 1001000,
$24 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$: 11000.

$$\begin{array}{l} 1001000 : 11000 = 11 \\ -\ 11000 \\ \hline \ \ 11000 \\ -\ \ 11000 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Skaičiai padalyti dvejetainėje sistemoje.

Patikrinimas: 11: $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3 = 72 : 24.$

6.3. Šešioliktainė sistema

Skaitmenų sekos konstravimas

Šešioliktainėje sistemoje yra 16 skirtingų skaitmenų 0; 1; 2; 3; ...; 9; A; B; C; D; E; F, kuriais galima užrašyti visus natūraliuosius skaičius. Skaičius užrašomas skaitmenų seka, skaitmens vertė priklauso nuo vietos, kurioje jis yra. Kiekvienai vietai priskiriamas apibrėžtas 16 laipsnis.

Skaitmenys 0–9 atitinka įprastus dešimtainės sistemos skaitmenis, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

...	4-oji vieta	3-ioji vieta	2-oji vieta	1-oji vieta	Vieta iš dešinės į kairę
...	16^3	16^2	16^1	16^0	16 laipsnis
...	4096	256	16	1	dešimtainis skaičius
...	1	C	2	B	pavyzdys

1C2B dešimtainiu skaičiumi išreiškiamas taip:

$$1C2B = 1 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0.$$

Šešioliktainių skaičių išreiškimas dešimtainiais skaičiais

Šešioliktainiai skaičiai keičiami dešimtainiais panašiai kaip ir dvejetainiai.

Pavyzdžiai: $4F = 4 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 4 \cdot 16 + 15 = 79;$

$$2E05A = 2 \cdot 16^4 + 14 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 =$$
$$= 2 \cdot 65536 + 14 \cdot 4096 + 5 \cdot 16 + 10 = 131072 +$$
$$+ 57344 + 80 + 10 = 188506.$$

Dešimtainių skaičių išreiškimas šešioliktainiais skaičiais

Dešimtainius skaičius išreiškiant šešioliktainiais verta naudotis tokia šešiolikos laipsnio lentele

n	0	1	2	3	4	5	...
16^n	1	16	256	4096	65536	1048576	...

Pirmiausia išskiriamas didžiausias šešiolikos laipsnis, telpantis skaičiuje, po to didžiausias šešiolikos laipsnis, telpantis liekanoje, ir t. t.

Pavyzdžiai. Dešimtainį skaičių 956 pakeiskime jam lygiu šešioliktainiu skaičiumi.

$956 = 3 \cdot 16^2$, liekana 188;

$188 = 11 \cdot 16^1$, liekana 12;

$12 = 12 \cdot 16^0$.

Vadinasi, gautas toks šešioliktainis skaičius: 3BC.

Dešimtainį skaičių 5000 pakeiskime jam lygiu šešioliktainiu skaičiumi.

$5000 = 1 \cdot 16^3$, liekana 904;

$904 = 3 \cdot 16^2$, liekana 136;

$136 = 8 \cdot 16^1$, liekana 8;

$8 = 8 \cdot 16^0$.

Šešioliktainis skaičius yra toks: 1388.

Dvejetainių skaičių išreiškimas šešioliktainiais skaičiais

Dvejetainius skaičius galima išreikšti šešioliktainiais skaičiais taip: pirmiausia dvejetainiai skaičiai pakeičiami jiems lygiais dešimtainiais, po to šie pakeičiami jiems lygiais šešioliktainiais skaičiais. Tačiau toks būdas gana smulkmeniškas. Yra paprastesnis sąryšis, susiejantis dvejetaines ir šešioliktaines skaičiavimo sistemas.

> Kiekvieną keturženklį dvejetainį skaičių (tetradą) galima išreikšti šešioliktainiu skaičiumi.

Pateikiama lentelė paaiškina šį sąryšį.

Šešioliktainis skaičius	Dvejetainis skaičius			
	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1

Tęsinys

Šešioliktainis skaičius	Dvejetainis skaičius			
	2^3	2^2	2^1	2^0
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

Dviženklį skaičių, sudarytą iš daugiau nei keturių ženklų, galima išreikšti šešioliktainiu, kiekvieną atskirai paimtą tetradą pakeičiant šešioliktainiu skaičiumi.

Tetrados sudaromos imant po keturis ženklus iš dešinės. Jeigu paskutinioji skaitmenų grupė iš kairės turi mažiau nei keturis skaitmenis, ji papildoma iki tetrados prirašant iš priekio nulius.

Pavyzdžiai. Dvejetainį skaičių 10011101 galima išskaidyti tiksliai į dvi tetradas: 1001 – 1101. Šešioliktainis skaičius yra toks: 9D.
Dvejetainį skaičių 1011010100 papildžius iš priekio dviem nuliais galima išskaidyti tiksliai į tris tetradas: 0010 – 1101 – 0100. Šešioliktainis skaičius yra toks: 2D4.

Šešioliktainė sistema dažnai naudojama norint trumpiau užrašyti ilgą dvejetainį skaičių.

Pavyzdys. Skaičių 10011101011001000100 atitinka šešioliktainis skaičius 9D644.
Atitinkamas dešimtainis skaičius yra 644 676.

6.4. Dvejetainis dešimtainis kodas

Kodavimo instrukcija

Dvejetainis dešimtainis kodas (iš anglų kalbos žodžių „Binary Coded Decimals“, todėl literatūroje anglų kalba jis žymimas BCD) skirtas kiekvienam dešimtainiam skaitmeniui išreikšti dvejetainių skaičių tetrada. Kodo instrukcija pateikiama tokia lentele:

Dešimtainis skaičius	Dvejetainis skaičius			
	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

Yra daugiau tetradų, kurias galima priskirti dar keliems dešimtainiams skaičiams. Jos vadinamos pseudotetradomis, koduojant jos nenaudojamos.

1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Kai dešimtainis skaičius turi daugiau ženklų, kiekvienam ženklui reikia priskirti tetradą.

> *n*-ženklis dešimtainis skaičius pritaikius dvejetainį dešimtainį kodą užrašomas *n* tetradomis.

Pavyzdžiai. Dešimtainis skaičius 568, parašytas dvejetainiu dešimtainiu kodu, yra toks:
0101 0110 1000.
Dešimtainis skaičius 1024, parašytas dvejetainiu dešimtainiu kodu, yra toks:
0001 0000 0010 0100.

Be šio kodo, yra ir kitokių kodavimo būdų. Jų visų tikslas – skaičius užrašyti dvejetainiais ženklais, kad kompiuteriui būtų lengviau jais operuoti.

Skaičių, užrašytų dvejetainiu dešimtainiu kodu, sudėtis

Sudėti galima sėkmingai naudojantis dvejetainių skaičių sudėties taisyklėmis. Tačiau būtina atkreipti dėmesį į tokius atvejus.

Suma yra mažesnė arba lygi 9.

Pavyzdys: 5 + 3 = 8;

```
  0 1 0 1
 +0 0 1 1
  1 1 1        perkėlimas
 --------
  1 0 0 0
```

Suma yra didesnė arba lygi 10.

Šiuo atveju gautas rezultatas iš pradžių yra pseudotetrada. Pagal kodavimo instrukciją, kai dešimtainį skaičių sudaro du ženklai, jį atitinka dvi tetrados. Tai galima pasiekti pridedant prie rezultato tetradą 0110 (skaitmenį 6).

Pavyzdys: 7 + 5 = 12;

```
          0 1 1 1
         +0 1 0 1
          1 1 1        perkėlimas
         --------
          1 1 0 0      pseudotetrada
         +0 1 1 0      koregavimas
          1            perkėlimas
-----------------
0 0 0 1   0 0 1 0      atitinka skaičių 12.
```

Didesnio kiekio tetradų sudėtis

Pirmiausia sudedamos dešinėje pusėje esančios tetrados. Jeigu sudėjus tetradas reikia perkelti vienetą, jis prisumuojamas prie kitos stulpelyje iš kairės po apačia parašytos tetrados. Jeigu gaunama pseudotetrada, tada ji pakoreguojama.

Pavyzdys: 59 + 78 = 137;

59	0 1 0 1	1 0 0 1	
78	+ 0 1 1 1	1 0 0 0	
	1 1 1 1		perkėlimas
	1 1 0 1	0 0 0 1	pseudotetrada
	+ 0 1 1 0	0 1 1 0	koregavimas
	1		perkėlimas
0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1	rezultatas
1	3	7	

Dešimtainis papildinys

Dešimtainės sistemos skaitmens dešimtainis papildinys yra skaitmuo, papildantis jį iki 10.

Pavyzdys. Skaitmens 7 dešimtainis papildinys yra 10 – 7 = 3.

Dvejetainio dešimtainio kodo tetrados dešimtainis papildinys yra tetrada, papildanti ją iki 1010.

Pavyzdys. Tetrados 0111 papildinys yra 0011:

```
 1 0 1 0
-0 1 1 1
 -------
 0 0 1 1
```

Skaičių, užrašytų dvejetainiu dešimtainiu kodu, atimtis

Atimtis, kai skaičiai užrašyti dvejetainiu dešimtainiu kodu, pakeičiama atėminio dešimtainio papildinio ir turinio sudėtimi. Gaunama pseudotetrada, kuri koreguojama pridedant tetradą 0110. Perkėlę vienetą į 5-ąją vietą, gauname teigiamą rezultatą. Skaitmuo, įrašytas 5-ojoje vietoje, neturi įtakos rezultatui. Kai nėra perkėlimo į 5-ąją vietą, rezultatas yra neigiamas.

Pavyzdžiai. *Rezultatas yra teigiamasis skaičius*: 9 – 7 = 2.

Skaitmens 7 dešimtainis papildinys yra 3, taigi tetrada 0011.

```
  1 0 0 1    9
+ 0 0 1 1    3
    1 1      perkėlimas
---------
  1 1 0 0    pseudotetrada
  0 1 1 0    koregavimas
  1          perkėlimas
-----------
1 0 0 1 0
```

Rezultatas yra tetrada 0010, t. y. dešimtainis skaičius 2. 5-oje vietoje įrašytas 1 reiškia +2.

Rezultatas yra neigiamasis skaičius: 7 – 9 = –2.

Skaitmens 9 dešimtainis papildinys yra tetrada 0001.

```
  0 1 1 1    7
+ 0 0 0 1    1
    1 1 1    perkėlimas
---------
  1 0 0 0
```

Perkėlimo į 5-ąją vietą nėra, taigi rezultatas yra neigiamas. Norint gauti šio neigiamojo skaičiaus modulį, reikia vėl sudaryti jo dešimtainį papildinį. Tetrados 1000 dešimtainis papildinys yra 0010, taigi dešimtainis skaičius 2.

Taikant dvejetainį dešimtainį kodą ne taip paprasta dvejetaines tetradas pakeisti elektros įtampos reikšmėmis. Pavyzdžiui, krentant įtampai atsiranda tetrada 0000, o tai gali įnešti painiavos. Tenka apgalvoti, kaip kitaip 16 galimų tetradų priskirti 10 dešimtainės sistemos skaitmenų. Pavyzdžiui, galima nenaudoti pirmųjų trijų ir paskutiniųjų trijų iš 16 galimų tetradų. Tetradai priskirti dvejetainiai skaičiai turės reikšmę, kuri visada bus trimis vienetais didesnė negu atitinkamo dešimtainio skaičiaus reikšmė.

7. Kompleksiniai skaičiai

7.1. Menamieji skaičiai

Lygties $x^2 = -a$, kai $a > 0$, negalima išspręsti realiųjų skaičių aibėje, nes šaknis $|x| = \sqrt{-a}$ nėra apibrėžta. Šią lygtį išskaidome taip: $|x| = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$. Apibrėžiame naujos rūšies skaičių aibės, kurios sudėtine dalimi yra realieji skaičiai, vienetą $\sqrt{-1} = i$. Tada lygties sprendinį galima užrašyti taip: $|x| = \sqrt{a} \cdot i$.

$i = \sqrt{-1}$ yra menamasis vienetas, bi – menamieji skaičiai (b turi būti realusis skaičius). Menamojo vieneto i kvadratas yra realusis skaičius –1, nes $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$. Veiksmų taisyklės, būdingos realiesiems skaičiams, tinka ir menamiesiems skaičiams.

Pavyzdžiai: $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$;

$$-\sqrt{-\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{-1} = -\frac{1}{3}i;$$

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Rightarrow |x| = \sqrt{-1} \cdot 2,$$

$$x = 2i \vee x = -2i.$$

Menamųjų skaičių aibė: $I = \{bi;\ \text{čia}\ b \in \boldsymbol{R} \wedge i = \sqrt{-1}\}$.

7.2. Kompleksiniai skaičiai

Apibrėžimas

Skaičius, išreikštas realiojo ir menamojo skaičiaus suma, vadinamas kompleksiniu skaičiumi.

Kompleksinių skaičių aibė: $C = \{a + bi;\ \text{čia}\ a, b \in \boldsymbol{R} \wedge i = \sqrt{-1}\}$.

Skaičius a vadinamas kompleksinio skaičiaus $z = a + bi$ realiąja dalimi, b – menamąja dalimi. Žymima: $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$. Kompleksinis skaičius, kurio realioji dalis $a = 0$, vadinamas grynai menamuoju. Komp-

leksinis skaičius, kurio menamoji dalis lygi 0, yra realusis skaičius.

Pavyzdžiai: $z = 1 + \sqrt{7}i$, $\operatorname{Re}(z) = 1$, $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{7}$;

$z = 15i$, $\operatorname{Im}(z) = 15$, grynai menamasis;

$z = -2$, $\operatorname{Re}(z) = -2$, realusis.

Kvadratinės lygties sprendiniai gali būti kompleksiniai skaičiai. Tai iliustruoja pavyzdys.

Pavyzdys: $x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-32}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-28}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1} \cdot \sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{7}i \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{7}i \vee x = 1 - \sqrt{7}i.$$

Abu sprendiniai yra kompleksiniai skaičiai.

7.3. Veiksmai su kompleksiniais skaičiais

Sudėtis ir atimtis

Norint sudėti (atimti) kompleksinius skaičius, reikia atitinkamai sudėti (atimti) jų realiąsias ir menamąsias dalis. Šių veiksmų rezultatas – kompleksinis skaičius.

$$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i, \\ z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i. \end{array}$$

Sudėčiai būdingas perstatomumo ir jungiamumo dėsnis, maža to, su bet kuriuo kompleksiniu skaičiumi z teisingos lygybės: $z + 0 = z$ ir $z + (-z) = 0 + 0i = 0$.

Pavyzdžiai: $(3+5i) + (-2+3i) = (3-2) + (5+3)i = 1 + 8i$;

$(-2+3i) + (3+5i) = (-2+3) + (3+5)i = 1 + 8i$;

$(8-4i) + (0+0i) = 8 - 4i$;

$z + (-z) = (8-4i) + (-8+4i) = 0$;

$(10-20i) - (7+3i) = (10-7) + (-20-3)i = 3 - 23i$;

$(12+3i) - 4i = (12-0) + (3-4)i = 12 - i.$

Daugyba

Dviejų kompleksinių skaičių sandauga taip pat yra kompleksinis skaičius.

$$z_1 = a+bi,\ z_2 = c+di \Rightarrow z_1 z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Ši taisyklė gaunama taip: $z_1 = a+bi,\ z_2 = c+di \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 =$$

$$= (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Teisingos lygybės $z\cdot 1 = z$ ir $z\cdot 0 = 0$. Daugybai būdingas perstatomumo ir jungiamumo dėsnis, be to, kiekvieną kompleksinį skaičių z atitinka skaičius $\frac{1}{z}$, su kuriuo $z\cdot\frac{1}{z} = 1+0i = 1$. Kompleksinių skaičių daugybai būdingas skirstomumo dėsnis: $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Kompleksiniai skaičiai $z = a+bi$ ir $z^* = a-bi$ vadinami jungtiniais. Jų sandauga yra realusis skaičius: $z\cdot z^* = a^2+b^2$.

Pavyzdžiai: $(5-2i)(3+4i) = (15+8)+(20-6)i = 23+14i$;

$(6+3i)(1+0i) = (6-0)+(0+3)i = 6+3i$;

$(1-i)((2+3i)+(3-4i)) = (1-i)(2+3i)+(1-i)(3-4i)$;

$(1-2i)(1+2i) = 1+2i-2i-4(-1) = 1+4 = 5$.

Dalyba

Dalijant kompleksinius skaičius, trupmena papildoma skaitiklį ir vardiklį padauginant iš skaičiaus, jungtinio vardikliui.

Pavyzdys: $\frac{2+3i}{1-4i} = \frac{2+3i}{1-4i}\cdot\frac{1+4i}{1+4i} = \frac{2+8i+3i-12}{1+16} = \frac{-10+11i}{17} =$

$= -\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i.$

Panašiai apskaičiuojama ir trupmena $\frac{1}{z}$, kuri yra atvirkštinė skaičiui z. Jos skaitiklis ir vardiklis padauginami iš skaičiaus, jungtinio vardikliui:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2},$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{a}{a^2+b^2} \text{ ir } \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{-b}{a^2+b^2},\ z\neq 0.$$

Įvairūs veiksmai

Pavyzdžiai. Trijų kompleksinių skaičių sandauga:

$$i\cdot(3+2i)\cdot(4-5i)=i\cdot(22-7i)=7+22i.$$

Keturių grynai menamųjų skaičių sandauga:

$$3i\cdot 5i\cdot(-i)\cdot 6i=-90i^4=-90.$$

Kompleksinių skaičių suma ir sandauga:

$$4+2i+(8-i)(2+5i)=4+2i+(16+5)+(40-2)i=$$
$$=4+2i+21+38i=25+40i.$$

Kompleksinio skaičiaus kvadratas:

$$(3-i)^2=9-6i+i^2=9-6i-1=8-6i.$$

Kompleksinio skaičiaus dalyba iš grynai menamojo skaičiaus:

$$\frac{4-i}{i}=\frac{4-i}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{4i-i^2}{-1}=\frac{4i+1}{-1}=-1-4i.$$

Lygtis, kurios nežinomasis yra kompleksinis skaičius z:

$$(1+i)z+(3-i)=7-3i\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(1+i)z=7-3i-3+i\Leftrightarrow(1+i)z=4-2i\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{4-2i}{1+i}\Leftrightarrow z=\frac{4-2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\Leftrightarrow z=\frac{4-6i+2i^2}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{4-6i-2}{2}\Leftrightarrow z=1-3i.$$

Jungtinių kompleksinių skaičių suma ir sandauga:

$$z=a+bi,\ z^*=a-bi\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} z+z^*=(a+bi)+(a-bi)=2a, \\ z\cdot z^*=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2. \end{matrix}$$

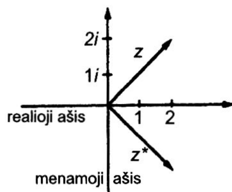
7.4. Grafinis vaizdavimas

Stačiakampė koordinačių sistema

Kompleksinius skaičius galima pavaizduoti plokštumos taškais, nubrėžus joje statmenai viena kitai dvi ašis – realiųjų skaičių ašį ir menamųjų skaičių ašį (Gauso skaičių plokštuma).

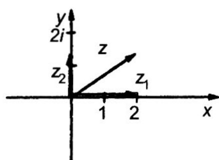
Pavyzdys: $z = 2 + 2i$, $z^* = 2 - 2i$.

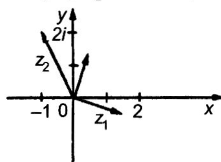
Iš pradžios taško į pažymėtus plokštumoje taškus nubrėžtos dvi rodyklės, vadinamos spinduliais vektoriais. Kiekvieną kompleksinį skaičių galima pavaizduoti spinduliu vektoriumi.



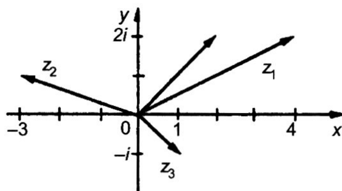
Du spindulius vektorius z_1 ir z_2 atitinka spindulys vektorius $z_1 + z_2$, kuris yra lygiagretainio įstrižainė, išvesta iš koordinačių pradžios. Lygiagretainis nubrėžiamas z_1 ir z_2 laikant jo kraštinėmis. Spindulys vektorius $z_1 - z_2$ yra lygiagretainio, nubrėžto laikant z_1 ir $-z_2$ jo kraštinėmis, įstrižainė, išeinanti iš koordinačių pradžios.

Pavyzdžiai: $z_1 = 2$, $z_2 = 1,5i$; $z_1 = 1,5 - 0,5i$, $z_2 = -1 + 2i$;



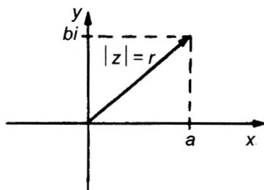


$z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = 1 - i$.



Trigonometrinė forma

Spindulys vektorius z, priskirtas kompleksiniam skaičiui, kurio realioji dalis a ir menamoji dalis b, turi ilgį $|z| = r$. Šis spindulys vektorius su realiąja ašimi sudaro kampą α, atskaitomą nuo realiosios ašies prieš laikrodžio rodyklę.



Pritaikę Pitagoro teoremą gauname, kad

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Iš trigonometrijos žinoma, jog $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$, $\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$, todėl $a = \mathrm{Re}(z) = |z| \cdot \cos\alpha$ ir $b = \mathrm{Im}(z) = |z| \sin\alpha$.

> Kiekvieną kompleksinį skaičių galima išreikšti trigonometrine forma $z = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$;
> čia $0 \le \alpha < 360°$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pavyzdžiai: $z = i \Rightarrow z = 1(\cos 90° + i\sin 90°)$;

$z = -3 \Rightarrow z = 3(\cos 180° + i\sin 180°)$;

$z = 1 - 3i \Rightarrow z = \sqrt{10}(\cos 288{,}4° + i\sin 288{,}4°)$,

nes $|z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$,

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}3162$,

$\sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -0{,}9487$.

Kadangi čia kalbama apie to paties kampo sinusą ir kosinusą, todėl $\alpha = 288{,}4°$.

Kompleksinių skaičių daugyba

Tarkime, nurodyti du kompleksiniai skaičiai, išreikšti trigonometrine forma: $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ir $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$. Sudauginę juos gauname:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\alpha\,\cos\beta + i\cos\alpha\,\sin\beta + i\sin\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta + i(\sin\beta\,\cos\alpha + \sin\alpha\,\cos\beta)).$$

Pritaikius trigonometrijos sudėties teoremas, šį reiškinį galima parašyti paprasčiau:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Dauginant du kompleksinius skaičius, išreikštus trigonometrine forma, reikia sudauginti jų modulius, o kampus sudėti.

Pavyzdžiai:
$$z_1 = 2(\cos 45° + i\sin 45°),$$
$$z_2 = 1{,}5(\cos 115° + i\sin 115°),$$
$$z = z_1 \cdot z_2 = 3(\cos 160° + i\sin 160°);$$
$$z_1 = 1(\cos 30° + i\sin 30°),$$
$$z_2 = 1(\cos 120° + i\sin 120°),$$
$$z = z_1 \cdot z_2 = 1(\cos 150° + i\sin 150°).$$

Iš daugybos taisyklių, kai skaičius z parašytas trigonometrine forma, gaunama:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(360° - \alpha) + i\sin(360° - \alpha)).$$

Kompleksinių skaičių dalyba

Panašiai kaip kompleksinių skaičių sandauga, dviejų kompleksinių skaičių dalmuo apskaičiuojamas taip:

$$z = z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)).$$

Dalijant du kompleksinius skaičius, išreikštus trigonometrine forma, reikia padalyti jų modulius, o kampus atimti.

Pavyzdys: $z_1 = 87(\cos 105° + i\sin 105°)$,

$z_2 = 29(\cos 15° + i\sin 15°)$,

$z_1 \cdot z_2 = 2523(\cos 120° + i\sin 120°)$,

$z_1 : z_2 = 3(\cos 90° + i\sin 90°) = 3i$.

7.5. Šaknys ir laipsniai

Kvadratinė šaknis

Turimas kompleksinis skaičius $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Reikia rasti jį atitinkantį skaičių $\sqrt{z} = s(\cos\beta + i\sin\beta)$, su kuriuo $\left(\sqrt{z}\right)^2 = z$ ir $\left(-\sqrt{z}\right)^2 = z$.

Vadinasi, turi galioti lygybė

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s^2(\cos\beta + i\sin\beta)^2 = s^2(\cos 2\beta + i\sin 2\beta).$$

Sulyginus gaunama

$$s = \sqrt{r} \text{ ir } \beta = \frac{1}{2}\alpha.$$

Tačiau turi galioti ir tokia lygybė:

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s^2(-\cos\beta - i\sin\beta)^2.$$

Iš čia $s = \sqrt{r}$ ir $\beta = \frac{1}{2}\alpha + 180°$.

Aibėje C kiekvienas kompleksinis skaičius $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z \neq 0$, turi dvi kvadratines šaknis:

$$z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 180°\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 180°\right)\right) = -z_1.$$

Dėsniai, kurie buvo būdingi veiksmams su šaknimis realiųjų skaičių aibėje, kompleksinių skaičių aibėje nebegalioja.

Pavyzdys. Raskime šaknis $\sqrt{2\sqrt{3} + 2i}$.

Pošaknį pertvarkome į trigonometrinę formą:

$z = 4(\cos 30° + i\sin 30°)$.

Tada abi kvadratinės šaknys nusakomos formulėmis:

$z_1 = 2(\cos 15° + i\sin 15°) = 1{,}9318 + 0{,}5176i$,

$z_2 = 2(\cos 195° + i\sin 195°) = -1{,}9318 - 0{,}5176i$.

Kvadratinės lygtys

Tarkime, kad kompleksinių skaičių aibėje pateikta redukuotoji kvadratinė lygtis $z^2+pz+q=0$. Jos sprendiniai randami pritaikius kvadratinės lygties, apibrėžtos realiųjų skaičių aibėje, sprendinių formulę $z=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Turime tik atkreipti dėmesį, kad pošaknis yra kompleksinis skaičius. Abi šaknys apskaičiuojamos pagal taisyklę, paaiškintą p. 185.

Lygtis $z^2+pz+q=0$, kai $p,\ q\in C$, aibėje C turi du sprendinius $z_1=\frac{-p+\omega_1}{2}$ ir $z_2=\frac{-p+\omega_2}{2}$; čia ω_1 ir ω_2 yra dvi kompleksinės šaknys, ištrauktos iš p^2-4q.

Pavyzdys. $z^2+(-1+i)z-i=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1-i+\sqrt{(1-i)^2+4i}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{1-i+\sqrt{2i}}{2}.$$

Randame $\sqrt{2i}$:

$2i=2(\cos 90°+i\sin 90°)$,

$\sqrt{2i}=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)=$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=1+i$ arba

$\sqrt{2i}=-1-i$.

Įrašius į sprendinių formulę, gaunama:

$z_1=\frac{1-i+1+i}{2}=1$ arba $z_2=\frac{1-i-1-i}{2}=-i$.

Pasinaudoję gautais sprendiniais įsitikiname, kad kompleksinių skaičių aibėje irgi yra teisinga Vieto teorema.

Laipsniai

Tarkime, žinomas trigonometrine forma parašytas kompleksinis skaičius $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$; čia $r\in \boldsymbol{R}^+$ ir $0\le\alpha<360°$. Šio skaičiaus n-tasis laipsnis nusakomas formule:

$$z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha),\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ši formulė vadinama anglų matematiko Abrahamo Muavro vardu.

Kai laipsnio rodiklis neigiamas, tai trigonometrinių funkcijų argumentas taip pat yra neigiamas. Tačiau juos galima pertvarkyti į teigiamus, pakeičiant $360° - \alpha$.

Pavyzdžiai: $z = 2(\cos 45° + i\sin 45°) \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^4 = 2^4(\cos 4\cdot 45° + i\sin 4\cdot 45°) =$$
$$= 16(\cos 180° + i\sin 180°) = 16\cdot(-1+0) = -16;$$
$$z^{-3} = 2^{-3}(\cos(-3)\cdot 45° + i\sin(-3)\cdot 45°) =$$
$$= \frac{1}{8}(\cos(-135°) + i\sin(-135°)) =$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 225° + i\sin 225°) = \frac{1}{8}(0,7071 - 0,7071i) =$$
$$= 0,0883 - 0,0883i.$$

7.6. Šaknies geometrinė prasmė

Šaknis iš vieneto

Lygtį $z^n = 1$ galima išspręsti z atžvilgiu.

Įrašę į ją $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ir $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, gauname lygybę:

$$r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

Sulyginus gaunama $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$ ir toliau:

kai $n = 1$, tai $\alpha = 0°$;

kai $n = 2$, tai $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 180°$;

kai $n = 3$, tai $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = 240°$;

kai $n = 4$, tai $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 90°$, $\alpha_3 = 180°$, $\alpha_4 = 270°$, ...;

kai $n = n$, tai $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = \frac{360°}{n}$, $\alpha_3 = 2\cdot\frac{360°}{n}$, ..., $\alpha_n = (n-1)\cdot\frac{360°}{n}$.

Taigi lygtis $z^n = 1$ aibėje C turi n sprendinių (n šaknų iš vieneto):

$$z_0 = 1,$$
$$z_1 = \cos\frac{360°}{n} + i\sin\frac{360°}{n},$$
$$z_2 = \cos 2\cdot\frac{360°}{n} + i\sin 2\cdot\frac{360°}{n},$$

....

$$z_{n-1} = \cos(n-1)\cdot\frac{360°}{n} + i\sin(n-1)\cdot\frac{360°}{n}.$$

Pavyzdžiai. Lygtis $z^4 = 1$ turi sprendinius:

$$z_0 = 1;$$

$$z_1 = \cos\frac{360°}{4} + i\sin\frac{360°}{4} = \cos 90° + i\sin 90°;$$

$$z_2 = \cos 2\frac{360°}{4} + i\sin 2\frac{360°}{4} = \cos 180° + i\sin 180°;$$

$$z_3 = \cos 3\frac{360°}{4} + i\sin 3\frac{360°}{4} = \cos 270° + i\sin 270°.$$

Lygtis $z^6 = 1$ turi sprendinius:

$$z_0 = 1;$$

$$z_1 = \cos\frac{360°}{6} + i\sin\frac{360°}{6} = \cos 60° + i\sin 60°;$$

$$z_2 = \cos 2\frac{360°}{6} + i\sin 2\frac{360°}{6} = \cos 120° + i\sin 120°;$$

$$z_3 = \cos 3\frac{360°}{6} + i\sin 3\frac{360°}{6} = \cos 180° + i\sin 180°;$$

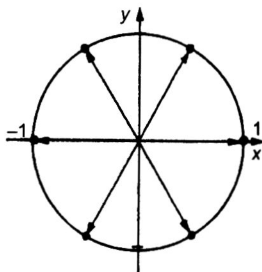
$$z_4 = \cos 4\frac{360°}{6} + i\sin 4\frac{360°}{6} = \cos 240° + i\sin 240°;$$

$$z_5 = \cos 5\frac{360°}{6} + i\sin 5\frac{360°}{6} = \cos 300° + i\sin 300°.$$

Geometrinis vaizdavimas apskritimo taškais

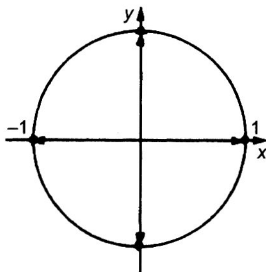
Pavaizdavę lygties $z^n = 1$ sprendinius Gauso plokštumos taškais gauname, jog jie yra taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į vienetinį apskritimą, viršūnės, kurių viena – realiosios ašies taškas 1. Taip yra, kai visų sprendinių modulis lygus 1, o kampai skiriasi tik kartotiniu $\frac{360°}{n}$.

Pavyzdžiai. $z^6 = 1$.
Lygties sprendiniai yra taisyklingojo šešiakampio, įbrėžto į vienetinį apskritimą, viršūnės (žr. prieš tai išspręstą pavyzdį).



$z^4 = 1$.

Lygties sprendiniai yra taisyklingojo keturkampio, įbrėžto į vienetinį apskritimą, viršūnės (žr. prieš tai išspręstą pavyzdį).



7.7. Pagrindinė algebros teorema

Kompleksinių skaičių aibėje sprendinius turi ne tik tiesinės ar kvadratinės lygtys, bet ir n-tojo laipsnio lygtys $z^n = 1$. Matematikas Karlas Frydrichas Gausas jau 1799 m. įrodė, kad sprendinius turi didelė klasė lygčių. Pagrindinė algebros teorema teigia:

> kiekviena n-tojo laipsnio lygtis $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, kurios koeficientai a_n, a_{n-1}, ..., $a_0 \in C$, aibėje C turi mažiausiai vieną sprendinį.

Šios lygties sprendiniai yra sveikosios racionaliosios funkcijos $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ nuliai. Iš pagrindinės algebros teoremos gaunama tokia svarbi teorema:

> kiekviena sveikoji racionalioji n-tojo laipsnio funkcija turi aibėje C lygiai n nulių, kai kartotinis nulis įskaitomas tiek kartų, kiek jis kartojasi.

Kai z_1, z_2, ..., z_n yra $f(z)$ nuliai, tai $f(z)$ galima aibėje C išskaidyti taip: $f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$. Realioji funkcija gali turėti arba tik realiuosius nulius, arba tik kompleksinius nulius, arba realiuosius ir kompleksinius nulius. Kiekvieną nulį, išreikštą kompleksiniu skaičiumi, atitinka nulis, išreikštas jungtiniu kompleksiniu skaičiumi.

8. Planimetrija

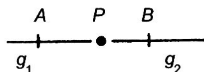
8.1. Pagrindinės sąvokos

Tiesė g yra aibė, sudaryta iš be galo daug taškų. Kiekvieną tiesę vienareikšmiškai apibrėžia du taškai.

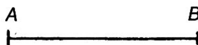


Taškas P dalija tiesę į dvi pustieses g_1 ir g_2:

$g_1 = PA$; $g_2 = PB$.



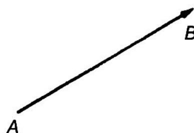
Atkarpa AB yra visų tiesės g taškų, esančių tarp dviejų jos taškų A ir B, aibė. Abu galai A ir B priklauso atkarpai.



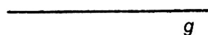
Spindulys yra pustiesė su nurodyta joje kryptimi.



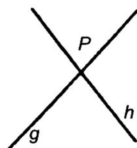
Rodyklė yra atkarpa, kurioje nurodyta kryptis.



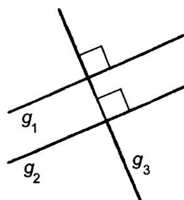
Plokštumoje esanti tiesė dalija ją į dvi pusplokštumes. Pati tiesė yra kiekvienos pusplokštumės poaibis.



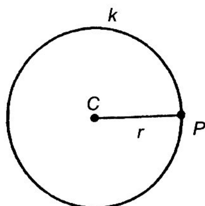
Dvi tiesės g ir h susikerta, jeigu yra taškas P, kuris yra ir tiesės g, ir tiesės h elementas.



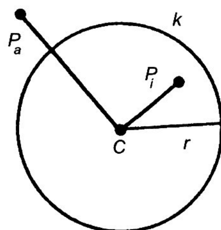
Dvi tiesės g_1 ir g_2 yra lygiagrečiosios, kai yra tiesė g_3, statmena abiem šioms tiesėms.



Visi taškai, nuo fiksuotojo taško C nutolę vienodais atstumais PC, priklauso apskritimui k. Atstumas $PC = r$ vadinamas apskritimo spinduliu.



Visi taškai P_i, nuo taško C nutolę atstumu $P_iC < r$, yra apskritimo viduje (priklauso skrituliui). Visi taškai P_a, nuo taško C nutolę atstumu $P_aC > r$, yra apskritimo išorėje.



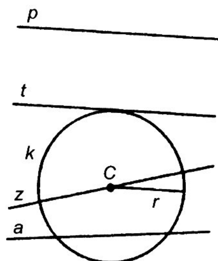
Tiesė g gali apskritimą k kirsti, liesti arba neturėti su juo bendrųjų taškų.

Tiesė p ir apskritimas k neturi bendrųjų taškų: $g \cap k = \{\ \}$.

Tiesė yra liestinė t: $g \cap k = \{B\}$.

Tiesė yra kirstinė a: $g \cap k = \{P_1,\ P_2\}$.

Tiesė z eina per apskritimo centrą: $g \cap k = \{P_1,\ P_2\} \wedge C \in g$.

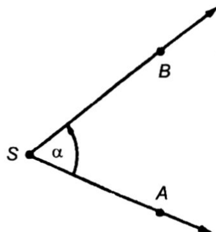


Apskritimo styga yra atkarpa, kurią apskritimas iškerta iš kirstinės. Ilgiausia styga (styga, einanti per C) vadinama skersmeniu d.

Kampas

Du iš vieno taško S (viršūnės) išeinantys spinduliai $\overrightarrow{SA}$ ir $\overrightarrow{SB}$ (kraštinės) sudaro kampą. Tarp kraštinių esanti plokštumos dalis vadinama kampo vidumi. Žymima $\angle ASB$ arba mažosiomis graikiškosiomis raidėmis, pavyzdžiui, α.

Kampo matas apibūdinamas spindulio $\overrightarrow{SA}$ posūkiu apie tašką S prieš laikrodžio rodyklę iki jo sutapimo su spinduliu $\overrightarrow{SB}$.



1 laipsnis (1°) yra 360-oji pilnutinio posūkio kampo dalis. $1° = 60'$ (kampo minučių), $1' = 60''$ (kampo sekundžių). Minutes ir sekundes su dešimtainėmis laipsnio dalimis sieja lygybės:

$$6' = 0{,}1°; \qquad 36'' = 0{,}01°.$$

Pavyzdžiai: $64{,}4° = 64°24'$, kadangi $0{,}4° = 4 \cdot 6' = 24'$;

$23°42' = 23{,}7°$, nes $\left(\frac{42}{60}\right)^\circ = 0{,}7°$;

$32°25'20'' = 32{,}4222°$, nes $\left(\frac{25}{60}\right)^\circ \approx 0{,}41667°$ ir $\left(\frac{20}{3600}\right)^\circ \approx 0{,}00556°$.

Pagal didumą kampai skirstomi į:

smailiuosius kampus, kai $0 < \alpha < 90°$;

stačiuosius kampus, kai $\alpha = 90°$;

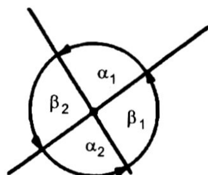
bukuosius kampus, kai $90° < \alpha < 180°$;

ištiestinius kampus, kai $\alpha = 180°$;

pilnutinius kampus, kai $\alpha = 360°$.

Vienas prieš kitą esantys kampai, kuriuos sudaro dvi susikertančiosios tiesės, yra lygūs. Šie kampai vadinami kryžminiais:

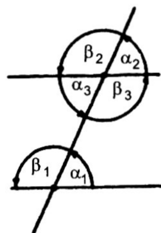
$\alpha_1 = \alpha_2$; $\beta_1 = \beta_2$.



Gretutiniai kampai yra vienas šalia kito ir vienas kitą papildo iki 180°:

$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 180°$.

Perkirtus dvi lygiagrečiąsias tieses trečiąja, gaunami vienodo didumo atitinkamieji kampai $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ ir vienodo didumo priešiniai kampai $\alpha_1 = \alpha_3$, $\beta_1 = \beta_3$.



Pavyzdys. Nurodytas kampas $\beta_1 = 123°$. Tada kiti kampai yra tokie:

$\beta_2 = 123°$ (β_1 ir β_2 – atitinkamieji kampai),

$\beta_3 = 123°$ (β_2 ir β_3 - kryžminiai kampai),

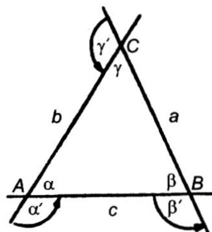
$\alpha_1 = 180° - 123° = 57°$ (α_1 ir β_1 - gretutiniai kampai),

$\alpha_2 = 57°$ (α_1 ir α_2 - atitinkamieji kampai),

$\alpha_3 = 57°$ (α_1 ir α_3 - priešiniai kampai).

8.2. Trikampis

Žymėjimai:
Viršūnės: *A*, *B*, *C*.
Kraštinės: *a*, *b*, *c*.
Vidaus kampai: α, β, γ.
Priekampiai: α′, β′, γ′.



Kampų suma

Trikampio vidaus kampų suma lygi 180°, priekampių suma – 360°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°; \qquad \alpha' + \beta' + \gamma' = 360°.$$

Priekampis lygus kitų dviejų negretutinių jam trikampio vidaus kampų sumai:

$$\alpha' = \beta + \gamma; \quad \beta' = \alpha + \gamma; \quad \gamma' = \alpha + \beta.$$

Pavyzdžiai. Trikampio kampai $\alpha = 48°$ ir $\beta = 105°$. Raskime likusį vidaus kampą ir visus priekampius.

$\gamma = 180° - 48° - 105° = 27°$,

$\gamma' = 48° + 105° = 153°$,

$\alpha' = 180° - 48° = 132°$ (gretutinis kampas),

$\beta = 180° - 105° = 75°$ (gretutinis kampas).

Trikampio priekampis $\gamma' = 135°$ ir $\alpha = \beta$.
Raskime vidaus kampus ir likusius priekampius.

$\gamma = 180° - 135° = 45°$ (gretutinis kampas),

$\alpha + \beta = \alpha + \alpha = 135° \Rightarrow \alpha = 67,5° = \beta$,

$\alpha' = \beta' = 180° - 67,5° = 112,5°$.

Trikampio nelygybės

Bet kurio trikampio dviejų kraštinių ilgių suma yra didesnė už trečiosios kraštinės ilgį.

$$a + b > c; \qquad a + c > b; \qquad b + c > a.$$

Bet kurio trikampio dviejų kraštinių ilgių skirtumo modulis yra mažesnis už trečiosios kraštinės ilgį.

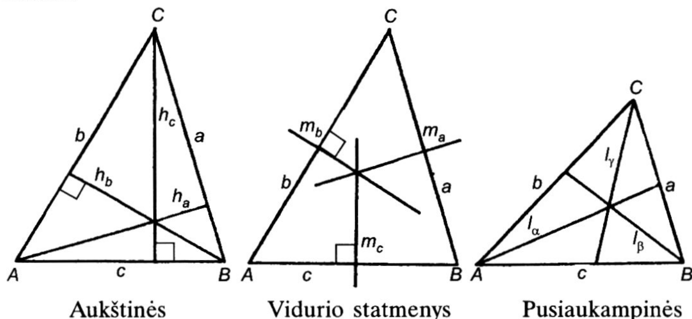
$$|b - a| < c; \qquad |c - a| < b; \qquad |c - b| < a.$$

Trikampio elementai

Aukštinė: tai statmuo, nuleistas iš viršūnės į priešingą kraštinę. Aukštinė gali būti ir trikampio išorėje. Trys trikampio aukštinės kertasi viename taške.

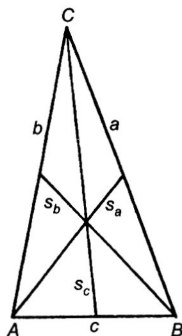
Vidurio statmuo: tai statmuo, iškeltas iš kraštinės vidurio taško. Trys trikampio vidurio statmenys kertasi viename taške, kuris yra apibrėžtinio apskritimo centras.

Pusiaukampinė: tai atkarpa, nubrėžta per trikampio viršūnę ir vienodai nutolusi nuo dviejų trikampio kraštinių. Trys trikampio pusiaukampinės kertasi viename taške, kuris yra įbrėžtinio apskritimo centras.



Aukštinės Vidurio statmenys Pusiaukampinės

Trikampio pusiaukraštinė yra atkarpa, jungianti viršūnę su jai priešingos kraštinės vidurio tašku. Trys trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške, kuris yra svorio centras.



Trikampio plotas

Trikampio plotą galima apskaičiuoti žinant pagrindą g ir į jį nuleistą aukštinę h:

trikampio plotas

$$S = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Tiksliau: $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c.$

Pavyzdys. Trikampio c = 49 cm, b = 34 cm ir h_c = 35,6 cm. Raskime trikampio plotą ir aukštinę h_b.

$$S=\frac{49\text{ cm}\cdot 35,6\text{ cm}}{2}=872,2\text{ cm}^2.$$

$$S=\frac{b\cdot h_b}{2}\Rightarrow h_b=\frac{2\cdot S}{b}\Rightarrow h_b=\frac{2\cdot 872,2\text{ cm}^2}{34\text{ cm}}=51,3\text{ cm}.$$

Trikampio plotą galima apskaičiuoti žinant jo dvi kraštines ir kampo tarp jų sinusą:

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha.$$

Pavyzdys: c = 6 cm, a = 3,5 cm, β = 47,5°,

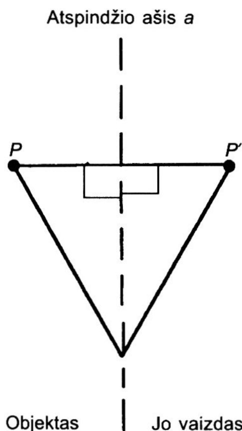
$$S=\frac{1}{2}\cdot 3,5\text{ cm}\cdot 6\text{ cm}\cdot\sin 47,5°=7,74\text{ cm}^2.$$

8.3. Veidrodinis atspindys ašies atžvilgiu (ašinė simetrija)

Apibrėžimas

Veidrodinis atspindys ašies a atžvilgiu yra atitiktis, kuri kiekvienam plokštumos taškui P priskiria vaizdo tašką P' pagal tokią taisyklę:

> P ir P' yra skirtingose pusėse nuo a. Tiesė PP' yra statmena ašiai a. P ir P' nutolę nuo ašies vienodais atstumais. Veidrodinis atspindys ašies atžvilgiu dar vadinamas ašine simetrija. Kai šiomis savybėmis pasižymi visi dviejų figūrų taškai, figūros vadinamos simetrinėmis ašies atžvilgiu, o tiesė a – simetrijos ašimi.



Ašinės simetrijos savybės

Tiesės vaizdas taip pat yra tiesė.

Atkarpos vaizdas yra tokio pat ilgio atkarpa.

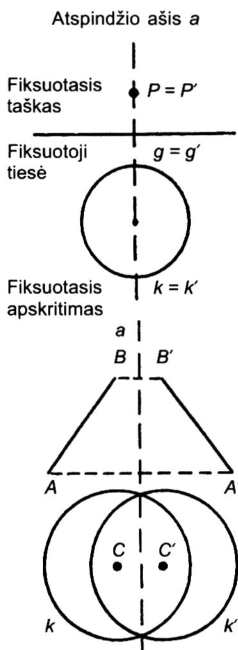
Kampo vidinės dalies vaizdas yra tokio pat didumo vidinė kampo dalis.

Apskritimo vaizdas yra tokio pat didumo apskritimas.

Figūros apėjimo kryptis (dažniausiai nurodoma raidėmis, surašytomis abėcėlės tvarka) pasikeičia.

Elementai, kurių nekeičia ašinė simetrija

Taškas, sutampantis su savo vaizdu, vadinamas fiksuotuoju tašku. Tiesė, sutampanti su savo vaizdu, vadinama fiksuotąja tiese. Apskritimas, sutampantis su savo vaizdu, vadinamas fiksuotuoju apskritimu.



Pavyzdys. Reikia nubrėžti atkarpos AB ir apskritimo k vaizdus, gautus ašine simetrija.

Kairėje pusėje nuo simetrijos ašies a yra nurodytoji atkarpa ir nurodytojo apskritimo centras C. Dešinėje pusėje nuo a yra atkarpos ir apskritimo vaizdai, gauti ašine simetrija. Atkreipkite dėmesį į taškus, kuriuose susikerta nurodytasis apskritimas ir jo vaizdas.

8.4. Pagrindiniai brėžimo uždaviniai

Klasikiniai brėžimo uždaviniai sprendžiami panaudojant tik liniuotę ir skriestuvą. Liniuotė, kurioje sužymėtos padalos, ir matlankis nenaudojami.

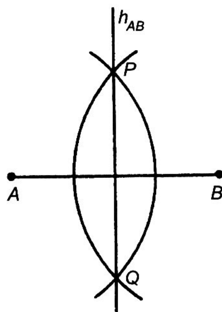
Turint galvoje veidrodinio atspindžio dėsnius, galima nubrėžti tokias linijas: atkarpos vidurio statmenį, statmenį atkarpai ir pusiaukampinę.

Vidurio statmuo

Atkarpos AB vidurio statmuo yra tiesė, einanti per atkarpos vidurio tašką ir statmena jai (su atkarpa sudaro statųjį kampą).

Brėžimas

Pirmiausia nubrėžiama atkarpa AB. Po to nubrėžiamas apskritimas, kurio centras yra A, o spindulys didesnis negu ilgio AB pusė. Dar nubrėžiamas tokio pat spindulio apskritimas, kurio centras B. Abu apskritimai susikerta taškuose P ir Q. Tiesė PQ ir yra ieškomasis vidurio statmuo.

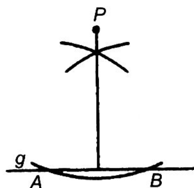


Statmens nuleidimas

Iš taško P reikia nuleisti statmenį į tiesę g.

Brėžimas

Pirmiausia nubrėžiama tiesė g ir pažymimas taškas P. Po to brėžiamas apskritimas, kurio centras P ir kuris tiesę g kerta dviejuose taškuose A ir B. Dabar brėžiamas atkarpos AB vidurio statmuo. Ieškomasis statmuo yra vidurio statmens dalis.

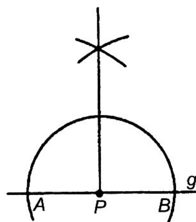


Statmens iškėlimas

Iš atkarpos taško P reikia iškelti statmenį šiai atkarpai.

Brėžimas

Pirmiausia nubrėžiama tiesė *g* ir pažymimas taškas *P*. Po to brėžiamas apskritimas, kurio centras *P* ir kuris tiesę *g* kerta taškuose *A* ir *B*. Dabar brėžiamas atkarpos *AB* vidurio statmuo. Ieškomasis statmuo priklauso šiam vidurio statmeniui.

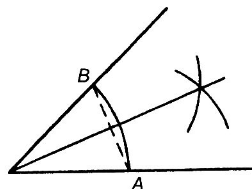


Pusiaukampinė

Reikia nubrėžti nurodyto kampo pusiaukampinę.

Brėžimas

Brėžiamas bet kokio spindulio apskritimas, kurio centras yra kampo viršūnė. Apskritimas kerta kampo kraštines taškuose *A* ir *B*. Atkarpos *AB* vidurio statmuo ir yra ieškomoji pusiaukampinė.



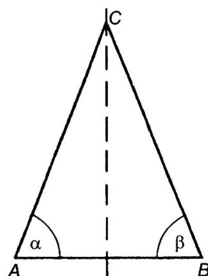
Ypatingų kampų brėžimas

Brėžiant vidurio statmenis, taip pat iškeliant ar nuleidžiant statmenis nubrėžiami statieji kampai. Brėžiant pusiaukampines galima nubrėžti kampus, kurių didumas lygus 45°, 22,5°, 11,25° ir t. t. Kombinuojant juos vieną su kitu galima gauti 135°, 67,5°, 122,5°, 101,25° ir t. t. didumo kampus.

8.5. Ypatingieji trikampiai

Lygiašonis trikampis

Jis turi dvi vienodo ilgio kraštines (šonines kraštines) *BC* ir *AC*, pagrindą *AB* ir vienodo didumo pagrindo kampus α ir β. Lygiašonis trikampis yra ašies atžvilgiu simetriška figūra.



Lygiakraštis trikampis

Jis turi tris vienodo ilgio kraštines a. Kiekvienas vidaus kampas lygus 60°. Trikampis turi tris simetrijos ašis, kurios susikerta viename taške. Tame pačiame taške susikerta aukštinės, vidurio statmenys, pusiaukampinės ir pusiaukraštinės. Perimetras yra tris kartus didesnis už kraštinės ilgį.

Kadangi vidurio kampo didumas lygus 60°, tai nubraižius lygiakraštį trikampį galima nubrėžti 60°, 30°, 120° ir t. t. didumo kampus.

Aukštinė: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

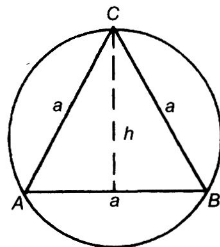
Plotas: $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Apibrėžtinio apskritimo spindulys:

$R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

Įbrėžtinio apskritimo spindulys:

$r = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.



Pavyzdys. Lygiakraščio trikampio perimetras lygus 18 cm.

Kraštinė: $a = \frac{1}{3} \cdot 18 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$.

Plotas: $S = \frac{(6 \text{ cm})^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 15{,}6 \text{ cm}^2$.

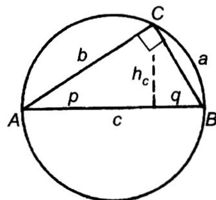
Aukštinė: $h = \frac{6 \text{ cm}}{2} \cdot \sqrt{3} = 5{,}2 \text{ cm}$.

Apibrėžtinio apskritimo spindulys: $R = \frac{6 \text{ cm}}{3} \cdot \sqrt{3} = 3{,}5 \text{ cm}$.

Įbrėžtinio apskritimo spindulys: $r = \frac{6 \text{ cm}}{6} \cdot \sqrt{3} = 1{,}7 \text{ cm}$.

Statusis trikampis

Tai trikampis, kurio vienas kampas lygus 90° (yra statusis). Kraštinės, sudarančios statųjį kampą, vadinamos statiniais. Prieš statųjį kampą esanti kraštinė vadinama įžambine.



Talio apskritimas. Stačiojo kampo viršūnė priklauso apskritimui, kurio skersmuo yra įžambinė. Šis apskritimas vadinamas Talio apskritimu, jis apibrėžtas apie statųjį trikampį.

Įžambinės dalys. Aukštinė, nuleista į įžambinę, dalija ją į dvi atkarpas p ir q, kurios yra statinių projekcijos įžambinėje. Stačiojo trikampio plotas apskaičiuojamas arba kaip jo statinių ilgių sandaugos pusė, arba kaip įžambinės ilgio ir į ją nuleistos aukštinės sandaugos pusė.

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \quad \text{arba} \quad S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c.$$

Stačiojo trikampio statinių kvadratų suma lygi įžambinės kvadratui.

Pitagoro teorema: $a^2+b^2=c^2$.

Pavyzdys: $c = 10$ cm, $b = 8$ cm,

$$c^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2=c^2-b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2},$$

$$a=\sqrt{(10\text{ cm})^2-(8\text{ cm})^2}=\sqrt{100\text{ cm}^2-64\text{ cm}^2}=$$

$$=\sqrt{36\text{ cm}^2}=6\text{ cm}.$$

Statinio kvadratas lygus įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje sandaugai.

Statinių teoremos: $a^2=c\cdot p$ arba $b^2=c\cdot q$.

Aukštinės, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės, kvadratas lygus statinių projekcijų įžambinėje sandaugai.

Aukštinės teorema: $h^2=p\cdot q$.

Pavyzdys. $a = 6$ cm, $p = 4{,}5$ cm.

Pritaikius statinių teoremą, pirmiausia randama įžambinė c, po to iššyk q.

Pagal Pitagoro teoremą apskaičiuojamas statinis b, po to, pasitelkus aukštinės teoremą, ir aukštinė h:

$$a^2 = c \cdot p \Leftrightarrow c = \frac{a^2}{p} \Rightarrow c = \frac{(6\text{ cm})^2}{4{,}5\text{ cm}} = 8\text{ cm};$$

$$c = p + q \Leftrightarrow q = c - p \Rightarrow q = 8\text{ cm} - 4{,}5\text{ cm} = 3{,}5\text{ cm};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2};$$

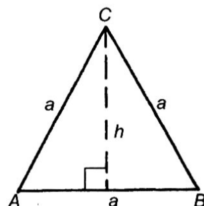
$$b = \sqrt{64\text{ cm}^2 - 36\text{ cm}^2} = \sqrt{28\text{ cm}^2} \approx 5{,}3\text{ cm};$$

$$h^2 = p \cdot q \Rightarrow h = \sqrt{p \cdot q},\ h = \sqrt{4{,}5\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ cm}} =$$

$$= \sqrt{15{,}75\text{ cm}^2} \approx 4\text{ cm}.$$

Reikia rasti lygiakraščio trikampio aukštinę h, kai jo kraštinės ilgis lygus a.

Dalinis trikampis ADC yra statusis trikampis, kurio įžambinė AC. Jam galima pritaikyti Pitagoro teoremą:



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 =$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h =$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Pitagoro skaičiai

Sveikieji skaičiai, tenkinantys Pitagoro teoremą, vadinami Pitagoro skaičiais.

Kai kintamieji u ir v įgyja natūralias reikšmes 1, 2, 3, ... ($u > v$), Pitagoro skaičiai apibūdinami formulėmis:

$$a = u^2 - v^2,\ b = 2uv,\ c = u^2 + v^2.$$

Pavyzdys. Įrašius $u = 4$ ir $v = 2$, gaunami tokie Pitagoro skaičiai:
$a = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$, $b = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$, $c = 4^2 + 2^2 =$
$= 16 + 4 = 20$.
Patikrinimas: $12^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow 144 + 256 = 400$.

8.6. Trikampių brėžimas

Kongruentieji atvaizdžiai

Figūros transformavimas į jos vaizdą bendrai vadinamas atvaizdžiu. Tai panašu į objekto pakeitimą jo nuotrauka.

Atvaizdis, kuris nepakeičia figūros ir jos elementų didumo, vadinamas kongruenčiuoju atvaizdžiu. Plokščias kongruenčias figūras galima uždengti vieną kita, taigi jų yra vienoda forma ir toks pat plotas. Todėl kongruenčios figūros dar vadinamos lygiomis.

Veidrodinis atspindys tiesės atžvilgiu (ašinė simetrija) ir bet koks tokių atspindžių derinys yra kongruentusis atvaizdis.

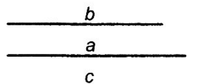
Tarkime, nurodyti du trikampiai, kurie yra, kaip manoma, kongruentieji. Sakykime, kad nežinoma, ar yra toks veidrodinis atspindys, kurio vienas trikampis atvaizduojamas į kitą. Tokiu atveju reikia patikrinti, ar sutampa jų atitinkamosios kraštinės ir atitinkamieji kampai. Taigi turi būti išmatuotos 6 dydžių poros. Natūralu paklausti, ar neužtenka mažiau duomenų norint ištirti trikampių kongruentumą (lygumą).

Lygumo požymis pagal tris kraštines

Jei trys vieno trikampio kraštinės yra atitinkamai lygios trims kito trikampio kraštinėms, tai tie trikampiai yra lygūs.

Iš šio požymio išplaukia, kad pagal tris nurodytas kraštines galima nubrėžti be galo daug lygių vienas kitam trikampių.

Pavyzdys. Reikia nubrėžti trikampį, kai žinomos jo kraštinės a, b ir c.

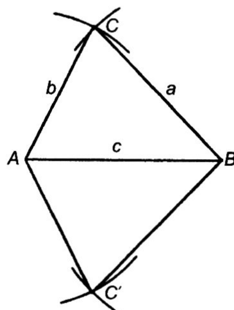


Braižymo planas

A, B: šiuos taškus apibrėžia atkarpa c.

C: 1. Nubrėžiamas apskritimo (A; b) lankas.
2. Nubrėžiamas apskritimo (B; a) lankas.

Iš dviejų gautų trikampių pasirenkamas tas, kurio viršūnės apeinamos prieš laikrodžio rodyklę.



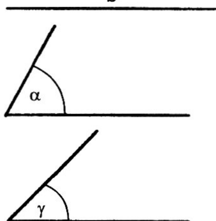
Lygumo požymis pagal kraštinę ir du kampus prie jos

> Du trikampiai yra lygūs, jei vieno trikampio kraštinė ir du kampai prie jos yra atitinkamai lygūs kito trikampio kraštinei ir dviem kampams prie jos arba vieno trikampio kraštinė ir kampas prie jos bei kampas prieš ją yra atitinkamai lygūs kito trikampio kraštinei ir kampui prie jos bei kampui prieš ją.

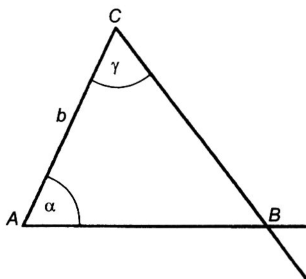
Iš šio požymio išplaukia, kad pagal du nurodytus kampus ir vieną kraštinę galima nubrėžti be galo daug vienas kitam lygių trikampių.

Pavyzdys. Reikia nubrėžti trikampį, kai žinomi kampai α ir γ bei kraštinė b.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

A, C: Šiuos taškus apibrėžia atkarpa b.

B: 1. Atidėjus kampą α nubrėžiama jo kraštinė.
2. Atidėjus kampą γ nubrėžiama jo kraštinė.

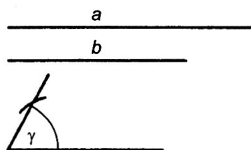
Lygumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų

> Jei vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas tarp jų atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir kampui tarp jų, tai tokie trikampiai yra lygūs.

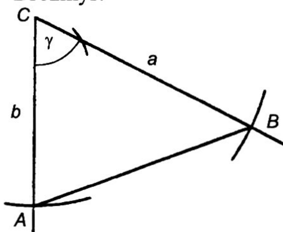
Iš šio požymio išplaukia, kad pagal nurodytas dvi kraštines ir kampą tarp jų galima nubrėžti be galo daug vienas kitam lygių trikampių.

Pavyzdys. Reikia nubrėžti trikampį, kai žinomos kraštinės a ir b bei kampas γ.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

C: taškas C yra kampo γ viršūnė.
A: 1. Pasirenkama viena kampo γ kraštinė.
2. Nubrėžiamas apskritimo $(C; b)$ lankas.
B: 1. Pasirenkama kita kampo γ kraštinė.
2. Nubrėžiamas apskritimo $(C; a)$ lankas.
Kampas γ brėžiant perkeltas.

Lygumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą prieš didesniąją kraštinę*

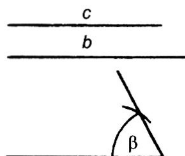
> Jei vieno trikampio dvi kraštinės ir prieš didesniąją kraštinę esantis kampas atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir prieš didesniąją kraštinę esančiam kampui, tai tokie trikampiai yra lygūs.

Iš šio požymio išplaukia, kad pagal dvi nurodytas kraštines ir prieš didesniąją kraštinę esantį kampą galima nubrėžti be galo daug vienas kitam lygių trikampių.

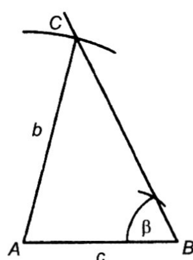
* Šis požymis mūsų matematinėje literatūroje neišskiriamas (*vertėjo pastaba*).

Pavyzdys. Reikia nubrėžti trikampį, kai žinomos kraštinės b ir c ir kampas β.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

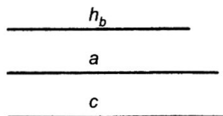
A, B: Šiuos taškus apibrėžia kraštinė c.
C: 1. Iš taško B atidedamas kampas β.
2. Nubrėžiamas apskritimo (A; b) lankas.
Kampas β brėžiant perkeltas.

Trikampio brėžimas pagal jo dalis

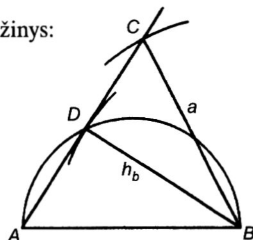
Kai reikia nubrėžti trikampį žinant kai kuriuos jo elementus, pirmiausia nubrėžiamos to trikampio dalys.

Pavyzdžiai. Reikia nubrėžti trikampį, kai žinomos jo kraštinės c ir a bei aukštinė h_b.

Žinoma:



Brėžinys:

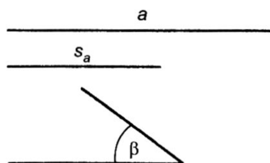


Braižymo planas

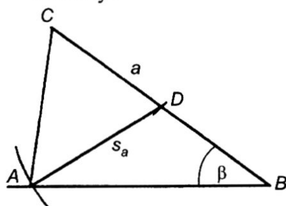
A, B: Šiuos taškus apibrėžia atkarpa c.
D: 1. Nubrėžiamas Talio apskritimas, kurio skersmuo AB.
2. Nubrėžiamas apskritimo (B; h_b) lankas.
C: 1. Nubrėžiama tiesė AD.
2. Nubrėžiamas apskritimo (B; a) lankas.

Reikia nubrėžti trikampį, kai žinoma kraštinė a, pusiaukraštinė s_a ir kampas β.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

B, C: Šiuos taškus apibrėžia atkarpa a.
D: Atkarpos $BC = a$ vidurio taškas.
A: 1. Iš taško B atidedamas kampas β.
2. Nubrėžiamas apskritimo (D; s_a) lankas.

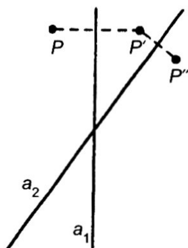
8.7. Veidrodinis atspindys taško atžvilgiu (centrinė simetrija)

Dvigubas veidrodinis atspindys

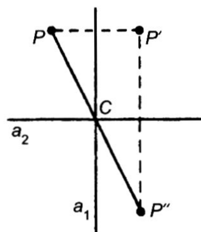
Kai figūra veidrodiškai atspindima ašies atžvilgiu, o gautas jos vaizdas vėl veidrodiškai atspindimas antrosios ašies atžvilgiu, tai kalbama apie dvigubą veidrodinį atspindį. Jis yra kongruentusis atvaizdis.

Veidrodinis atspindys taško atžvilgiu

Tai dvigubas veidrodinis atspindys dviejų viena kitai statmenų ašių atžvilgiu. Ašys susikerta centre C. Veidrodinis atspindys taško atžvilgiu dar vadinamas centrine simetrija.



Dvigubas veidrodinis atspindys



Centrinė simetrija

Centrinė simetrija pasižymi tokiomis savybėmis.

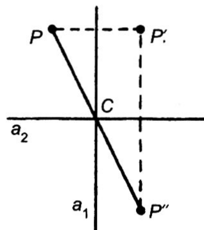
Tiesės, jungiančios atitinkamuosius taškus, susikerta centre C. Atitinkamuosius taškus jungiančias atkarpas taškas C dalija pusiau. Figūra ir jos vaizdas, gautas centrine simetrija, vadinami simetriškais taško atžvilgiu.

Fiksuotieji elementai

Centras C yra fiksuotasis taškas.

Visos tiesės, einančios per C, yra fiksuotosios tiesės.

Visi koncentriniai apskritimai, kurių centras C, yra fiksuotieji apskritimai.



8.8. Keturkampiai

Bet koks keturkampis

Žymėjimai

Viršūnės: A, B, C, D.

Kraštinių ilgiai: a, b, c, d.

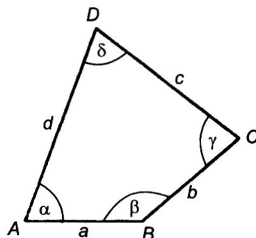
Įstrižainės: $AC = e$, $BD = f$.

Vidaus kampai:

α, β, γ, δ, be to, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Perimetras: $P = a + b + c + d$.

Plotas: S.

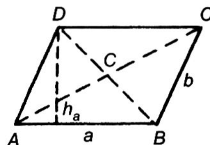


Įstrižainė dalija keturkampį į du trikampius. Bet kokį keturkampį galime nubrėžti, kai žinomi 5 jo elementai (kraštinės arba kampai).

Lygiagretainis

Tai keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios viena su kita.

Lygiagretainis yra taško C atžvilgiu simetriškas keturkampis. Jį apibūdina 3 elementai.

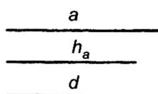


Savybės

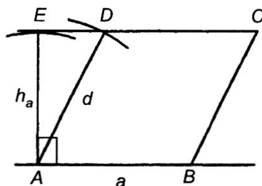
Priešais esančios kraštinės yra vienodo ilgio. Priešais esantys kampai yra vienodo didumo. Gretimieji kampai papildo vienas kitą iki 180°. Įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau.

Pavyzdys. Reikia nubrėžti lygiagretainį, kai žinomos kraštinės a ir d bei aukštinė h_a.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

A, B: Šiuos taškus apibrėžia atkarpa a.

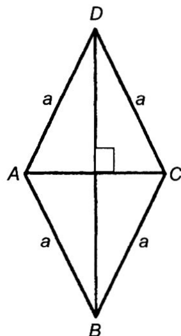
E: 1. Iš taško A iškeliamas statmuo į AB.
2. Nubrėžiamas apskritimo (A; h_a) lankas.

D: 1. Nubrėžiamas apskritimo (A; d) lankas.
2. Per tašką E nubrėžiama tiesė, lygiagreti su AB.

C: 1. Atkarpa ED pratęsiama.
2. Per tašką B nubrėžiama tiesė, lygiagreti su AD.

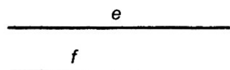
Rombas

Tai lygiagretainis, kurio visos keturios kraštinės yra vienodo ilgio. Rombui būdingos visos lygiagretainio savybės. Be to, rombas yra ašies atžvilgiu simetriška figūra. Įstrižainės statmenos viena kitai. Rombą nusako 2 jo elementai.

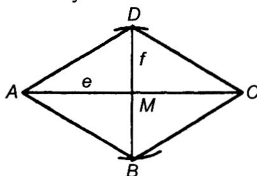


Pavyzdys. Reikia nubrėžti rombą, kai žinomos įstrižainės e ir f.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

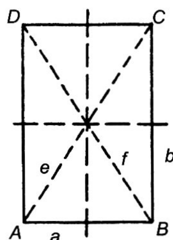
A, *C*: Šiuos taškus apibrėžia įstrižainė *e*.

B, *D*: 1. Nubrėžiamas *AC* vidurio statmuo.

2. Nubrėžiamas apskritimo $\left(M;\ \frac{1}{2}f\right)$ lankas.

M yra atkarpos *AC* vidurio taškas.

Stačiakampis



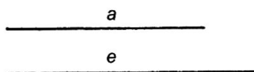
Tai lygiagretainis, kurio visi kampai yra statieji, taigi vienodo didumo. Stačiakampiui būdingos visos lygiagretainio savybės. Be to, jis turi dvi simetrijos ašis. Stačiakampį nusako 2 jo elementai.

Stačiakampis

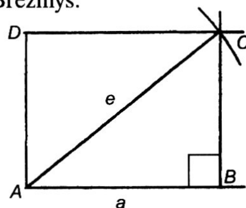
Perimetras:	$P = 2(a+b)$.
Plotas:	$S = ab$.
Įstrižainių ilgis:	$e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pavyzdžiai. Reikia nubrėžti stačiakampį, kai žinoma jo kraštinė *a* ir įstrižainė *e*.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

A, *B*: Šiuos taškus apibrėžia kraštinė *a*.

C: 1. Iš taško *B* iškeliamas statmuo į *AB*.

2. Nubrėžiamas apskritimas (*A*; *e*).

D: 1. Per tašką *C* nubrėžiama tiesė, lygiagreti su *AB*.

2. Per tašką *A* nubrėžiama tiesė, lygiagreti su *BC*.

Tarkime, kad a = 8 cm ir e = 17 cm. Reikia apskaičiuoti kraštinės b ilgį, stačiakampio perimetrą ir plotą.

$$e^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = e^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{e^2 - a^2},$$

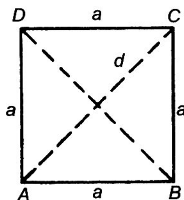
$$b = \sqrt{(17\text{ cm})^2 - (8\text{ cm})^2} = \sqrt{225\text{ cm}^2} = 15\text{ cm},$$

$$P = 2(8\text{ cm} + 15\text{ cm}) = 46\text{ cm},$$

$$S = 8\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} = 120\text{ cm}^2.$$

Kvadratas

Tai lygiagretainis, kurio visos kraštinės yra vienodo ilgio ir visi kampai yra vienodo didumo. Kvadratui būdingos visos lygiagretainio savybės. Be to, jo įstrižainės yra vienodo ilgio ir statmenos viena kitai. Kvadratas turi 4 simetrijos ašis. Kvadratą apibūdina vienas elementas.



Kvadratas

Perimetras: $P = 4a$.

Plotas: $S = a^2$.

Įstrižainės ilgis: $d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Pavyzdys. Nurodyta kvadrato įstrižainė d = 10 cm. Reikia rasti kraštinių ilgius, perimetrą ir plotą.

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{d^2}{2}},$$

$$a = \sqrt{\frac{100\text{ cm}^2}{2}} = \sqrt{50\text{ cm}^2} = 5\sqrt{2}\text{ cm} \approx 7{,}07\text{ cm},$$

$$P = 4 \cdot 5\sqrt{2}\text{ cm} = 20\sqrt{2}\text{ cm} \approx 28{,}28\text{ cm},$$

$$S = a^2 \Rightarrow S = 50\text{ cm}^2.$$

Deltoidas

Tai keturkampis, kurio viena įstrižainė yra simetrijos ašis. Jo savybės tokios.

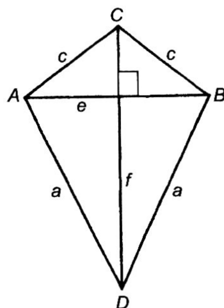
Kas dvi kraštinės yra lygios: $a = b$; $c = d$.

Simetrijos ašis du kampus dalija pusiau.

Vieną įstrižainę simetrijos ašis dalija pusiau.

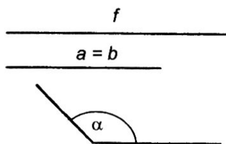
Įstrižainės yra statmenos viena kitai.

Deltoidą nusako 3 elementai.

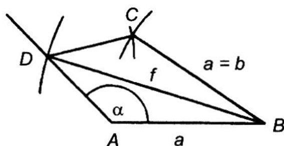


Pavyzdys. Reikia nubrėžti deltoidą, kai žinomos kraštinės $a = b$, įstrižainė f ir kampas α.

Žinoma:



Brėžinys:



Braižymo planas

A, B: Šiuos taškus apibrėžia a.

D: 1. Iš taško A atidedamas kampas α ir pasirenkama kita kraštinė.

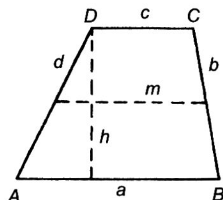
2. Nubrėžiamas apskritimo (B; f) lankas.

C: 1. Nubrėžiamas apskritimo (D; AD) lankas.

2. Nubrėžiamas apskritimo (B; $a = b$) lankas.

Bet kokia trapecija

Tai keturkampis, kurio dvi kraštinės yra lygiagrečios. Lygiagrečiosios kraštinės vadinamos pagrindais, o atstumas tarp jų – aukštine. Kitos dvi kraštinės vadinamos šoninėmis kraštinėmis.



Bet kuri trapecija	Vidurinė linija, nubrėžta per šoninių kraštinių vidurio taškus, yra lygiagreti su pagrindais. Vidurinės linijos ilgis yra lygus pagrindų ilgių sumos pusei: $m = \frac{1}{2}(a+c)$. Perimetras: $P = a+b+c+d$. Plotas: $S = m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$. Svorio centras: svorio centras S priklauso atkarpai, jungiančiai pagrindų vidurio taškus, ir yra nutolęs nuo pagrindo a atstumu $s = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2c}{a+c}$.

Lygiašonė trapecija

Tai trapecija, kurios šoninės kraštinės yra vienodo ilgio, ji turi simetrijos ašį. Lygiašonei trapecijai būdingos visos bet kurios trapecijos savybės. Be to, ji dar pasižymi tokiomis savybėmis.

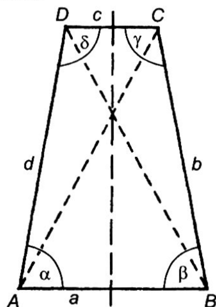
Kampai prie pagrindų yra poromis vienodo didumo: $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$.

Kampai prie šoninės kraštinės papildo vienas kitą iki 180°:

$\alpha + \delta = 180°$, $\beta + \gamma = 180°$.

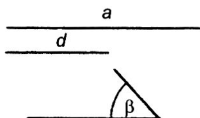
Įstrižainės yra vienodo ilgio: $e = f$.

Trapeciją apibūdina 3 elementai.

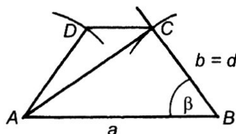


Pavyzdys. Reikia nubraižyti lygiašonę trapeciją, kai žinoma kraštinė a, kraštinė d ir kampas β.

Žinoma:



Brėžinys:



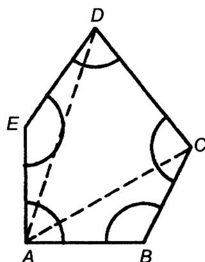
Braižymo planas

A, B: Šiuos taškus apibrėžia kraštinė a.

C: 1. Iš taško B atidedamas kampas β ir pasirenkama kita jo kraštinė.
2. Nubrėžiamas apskritimo (B; d) lankas.

D: 1. Per tašką C nubrėžiama tiesė, lygiagreti su a.
2. Nubrėžiamas apskritimo (A; d) lankas.

8.9. Daugiakampiai



Bet koks daugiakampis (n-kampis)

Iškilasis n-kampis (n = 3, 4, 5, ...) gaunamas sujungiant n plokštumos taškų uždara niekur savęs nekertančia laužte, kai visi jo vidaus kampai yra mažesni už 180°.

Per kiekvieną viršūnę eina $n-3$ įstrižainės. Iškiląjį n-kampį galima iš vienos viršūnės išvestomis įstrižainėmis išskaidyti į $n-2$ trikampius.

Daugiakampis

n-kampio kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180°$. Visų n-kampio galimų įstrižainių skaičius lygus $\frac{n(n-3)}{2}$.

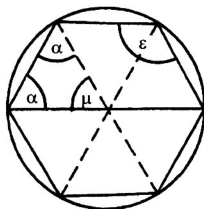
Pavyzdys. Tarkime, nurodytas 18-kampis.

Kampų suma: $(18-2)\cdot 180° = 16\cdot 180° = 2880°$.

Įstrižainės: $\frac{18(18-3)}{2} = \frac{18\cdot 15}{2} = 135$.

Trikampių: $18-2 = 16$.

Taisyklingasis daugiakampis



Jis turi n lygių kraštinių ir n lygių kampų. Apie n-kampį galima apibrėžti apskritimą.

Sujungus viršūnes su apibrėžtinio apskritimo centru, gaunama n lygių lygiašonių trikampių.

Pavyzdys. Nurodytas taisyklingasis 18-kampis.

Vidaus kampas ε: $\frac{1}{18}(18-2)\cdot 180° = 160°$.

Pagrindo kampai α: po 80°.

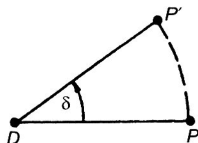
Centrinis kampas μ: 360° : 18 = 20°.

8.10. Posūkis

Apibrėžimas

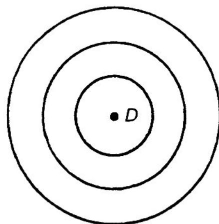
Posūkį apibūdina taškas D, apie kurį sukama, ir posūkio kampas δ su priskirta jam sukimosi kryptimi.

Taškų atitiktis. Nurodytas taškas P sujungiamas su tašku D ir atkarpa DP sukama apie tašką D kampu δ iki padėties DP'. P' yra vaizdas, gautas posūkiu. Visos figūros posūkiu atvaizduojamos į kongruenčias (lygias) figūras, išsaugant jų apėjimo kryptį.



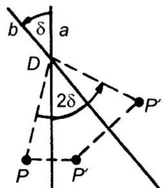
Fiksuotieji elementai

Vienintelis fiksuotasis taškas yra taškas D. Visi koncentriniai apskritimai, kurių centras D, yra fiksuotieji apskritimai. Visos tiesės, einančios per D, kai jos pasukamos kampu δ = 180° (centrinė simetrija), yra fiksuotosios tiesės. Pilnutinis posūkis (kampu δ = 360°) kiekvieną tašką atvaizduoja į jį patį. Tokiu atveju visi taškai yra fiksuotieji.



Fiksuotasis taškas
Fiksuotasis apskritimas

Dvigubas veidrodinis atspindys ašių a ir b atžvilgiu, kai šios ašys susikerta taške D sudarydamos kampą δ, gali būti pakeistas posūkiu apie D kampu 2δ.

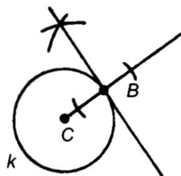


8.11. Apskritimas

Liestinė

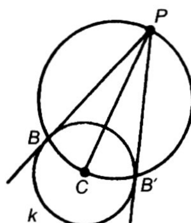
Tiesė, kuri su apskritimu turi tik vieną bendrąjį tašką, vadinama liestine. Spindulys, nubrėžtas per lietimosi tašką, yra statmenas liestinei.

Pavyzdžiai. Reikia per apskritimo k tašką B nubrėžti liestinę.



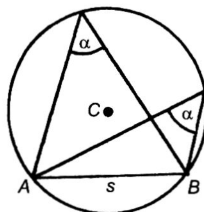
Iš taško B iškeliamas statmuo į tiesę CB. Šis statmuo ir yra liestinė.

Per tašką P, esantį šalia apskritimo, reikia nubrėžti apskritimo liestines.



Nubrėžiama atkarpa CP ir Talio apskritimas, laikant CP jo skersmeniu.

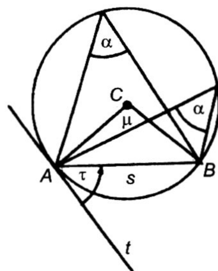
Talio apskritimo ir apskritimo k susikirtimo taškai B ir B' yra ieškomieji lietimosi taškai.



Įbrėžtinis kampas

Kampas α, kurio viršūnė priklauso apskritimui ir kuris remiasi į stygą s, vadinamas įbrėžtiniu kampu.

Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą pačią stygą, yra vienodo didumo.



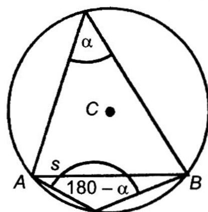
Kampas μ, kurio viršūnė yra apskritimo centras ir kuris remiasi į stygą s, vadinamas centriniu kampu.

Kampas τ yra kampas, kurį sudaro liestinė t ir styga s.

Centrinis kampas, kuris remiasi į stygą s, yra dvigubai didesnis už kampą tarp liestinės ir tos pačios stygos s: $2\tau = \mu$.

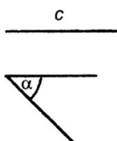
Centrinis kampas yra dvigubai didesnis už įbrėžtinį kampą, kai jie abu remiasi į tą pačią stygą: $2\alpha = \mu$.

Kiekvienas įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į tam tikrą apskritimo lanką, papildo įbrėžtinį kampą, kuris remiasi į likusį apskritimo lanką, iki 180°.

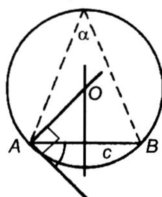


Pavyzdys. Per atkarpos c galus reikia nubrėžti apskritimą taip, kad į ją besiremiantis įbrėžtinis kampas būtų lygus α.

Žinoma:



Brėžinys:



Brėžimo planas

A, B: Šiuos taškus apibrėžia atkarpa c.

O: 1. Iš taško A, laikant c kraštine, atidedamas kampas α. Iš taško A iškeliamas statmuo kitai kampo α kraštinei.

2. Nubrėžiamas atkarpos AB vidurio statmuo.

Apskritimas (O; AO) yra ieškomasis.

Įbrėžtinis keturkampis

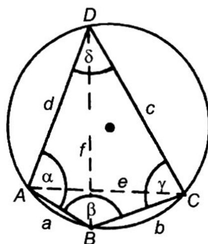
Tai keturkampis, kurio kraštinės a, b, c, d yra apskritimo stygos.

Plotas: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Pusperimetris: $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Priešingieji kampai:
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

Ptolemėjo teorema:
$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$.



Pavyzdys. Žinomos įbrėžtinio keturkampio kraštinės:
a = 8 cm, b = 4 cm, c = 9 cm, d = 8,7 cm.

$$p = \frac{1}{2}(8+4+9+8,7) \text{ cm} = 14,85 \text{ cm} \approx 14,9 \text{ cm},$$

$$S = \sqrt{(14,9-8)(14,9-4)(14,9-9)(14,9-8,7)} \text{ cm}^2 \Rightarrow$$

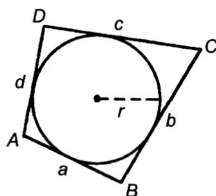
$$\Rightarrow S = 52,45 \text{ cm}^2,$$

$$e \cdot f = 8 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \cdot 8,7 \text{ cm} = 106,8 \text{ cm}^2.$$

Apibrėžtinis keturkampis

Tai keturkampis, kurio visos kraštinės yra apskritimo liestinės.

Priešingųjų kraštinių suma:
$a + c = b + d$.
Pusperimetris:
$p = \frac{a+b+c+d}{2}$.
Plotas: $S = r \cdot p$.



Pavyzdys. Žinomos trys apibrėžtinio keturkampio kraštinės b = 6,5 cm, c = 7 cm, d = 10,5 cm ir apskritimo spindulys r = 4 cm.

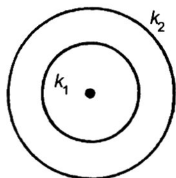
$$a = b + d - c \Rightarrow a = 6,5 \text{ cm} + 10,5 \text{ cm} - 7 \text{ cm} = 10 \text{ cm},$$

$$p = \frac{1}{2}(10+6,5+7+10,5) \text{ cm} = 17 \text{ cm},$$

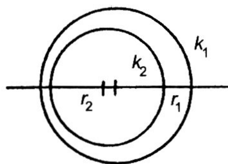
$$S = 4 \text{ cm} \cdot 17 \text{ cm} = 68 \text{ cm}^2.$$

Du apskritimai

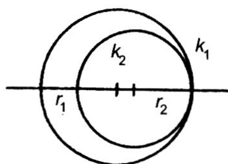
Du apskritimai yra simetriški vienas kitam tiesės, jungiančios jų centrus C_1 ir C_2, atžvilgiu. Atstumą tarp taškų C_1 ir C_2 pažymėkime z. Atsižvelgiant į apskritimų k_1 ir k_2 padėtį vienas kito atžvilgiu, skiriami tokie atvejai.



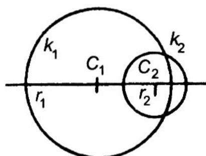
k_1 ir k_2 yra koncentriniai: $z = 0$.



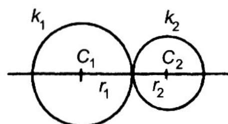
k_2 yra k_1 viduje: $0 < z < r_1 - r_2$.



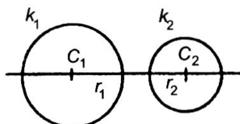
k_2 liečia k_1 iš vidaus: $z = r_1 - r_2$.



k_1 ir k_2 susikerta: $r_1 - r_2 < z < r_1 + r_2$.



k_2 liečia k_1 iš išorės: $z = r_1 + r_2$.



k_1 ir k_2 yra šalia vienas kito: $r_1 + r_2 < z$.

8.12. Apskritimo ilgis, skritulio plotas

Visas apskritimas

Spindulys r, skersmuo $d = 2r$:

formulės

apskritimo ilgis: $L = 2\pi r$;
skritulio plotas: $S = \pi r^2$;
skaičius π: $\pi = 3{,}141592654 \ldots \approx 3{,}14$.

Pavyzdys. Apskritimo spindulys $r = 15$ cm.

$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \text{ cm} = 94{,}2 \text{ cm},$

$S = 3{,}14 \cdot (15 \text{ cm})^2 = 706{,}5 \text{ cm}^2.$

Skaičius π kaip riba

Apskritimo ilgis gaunamas kaip ribinė įbrėžtinių ir apibrėžtinių daugiakampių perimetrų reikšmė, kai tų daugiakampių kraštinių skaičius neaprėžtai didėja.

Didėjant viršūnių skaičiui, įbrėžtinių daugiakampių perimetrai pastoviai didėja, o apibrėžtinių – pastoviai mažėja. Vadinasi, apibrėžtinių ir įbrėžtinių daugiakampių perimetrų skirtumas gali pasidaryti kiek norima mažas, todėl turi egzistuoti bendra jų riba, kuri ir yra apskritimo ilgis. Kai apskritimo spindulio ilgis lygus 0,5 ilgio vieneto (tada skersmuo lygus 1 ilgio vienetui), gaunamos tokios įbrėžtinių daugiakampių perimetrų p_n ir apibrėžtinių daugiakampių perimetrų P_n reikšmės:

n	p_n	P_n
6	3,0000	3,4641
12	3,1058	3,2154
24	3,1326	3,1597
48	3,1394	3,1461
96	3,1410	3,1427
192	3,1415	3,1419
...	...	...
3072	3,1415	3,14159

Iš lentelės matyti, kad perimetrų reikšmės vis labiau artėja prie skaičiaus π.

Panašiai galima apibrėžti skritulio plotą.

Pažymėkime: s_n – įbrėžtinių daugiakampių plotų seka, S_n – apibrėžtinių daugiakampių plotų seka. Kai viršūnių skaičius neaprėžtai didėja, abiejų sekų ribos yra lygios ir ta ribos reikšmė yra skritulio ploto reikš-

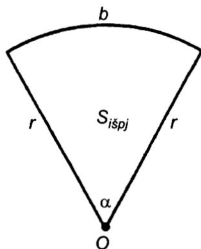
mė. Parinkę apskritimo spindulį, lygų 1 ilgio vienetui, ir apskaičiavę dydžius s_n bei S_n, įsitikintume, kad abi sekos vėl artėja prie skaičiaus π.

n	s_n	S_n
6	2,598076	3,464101
12	3,000000	3,215390
24	3,105826	3,159650
48	3,132625	3,146080
96	3,139350	3,142710
192	3,141030	3,141860
...	...	...
3072	3,14159	3,14159

Skaičius π (pi) yra iracionalusis skaičius. Iš seno žinoma daug jo racionaliųjų artinių. Ptolemėjas naudojo skaičių $3\frac{17}{120}$, Albrechtas Diūreris skaičių $3\frac{1}{8}$, žinomesnis yra Archimedo pasiūlytas artinys $\frac{22}{7}$. Skaičiavimams dažniausiai naudojama dešimtainė trupmena 3,14.

Skritulinė išpjova

Jos centrinis kampas yra α, lanko, į kurį remiasi, ilgis lygus b, jos plotas pažymėtas $S_{\text{išpj}}$.



$$S_{\text{išpj}} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°};$$

$$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}.$$

Pavyzdys. Reikia apskaičiuoti skritulio, kurio spindulys 8 cm, aštuntadalio plotą, lanko ilgį ir perimetrą.

$$S_{\text{išpj}} = 3{,}14(8\text{ cm})^2 \cdot \frac{45}{360°} = 25{,}12\text{ cm}^2,$$

$$b = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 \text{ cm} \cdot \frac{45}{360°} = 6{,}28 \text{ cm},$$
$$P_s = 6{,}28 \text{ cm} + 2 \cdot 8 \text{ cm} = 22{,}28 \text{ cm}.$$

Skritulinė nuopjova

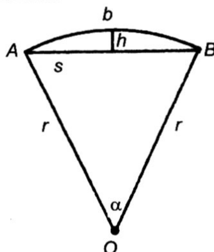
Tai skritulinės išpjovos dalis, esanti tarp stygos ir lanko. Jos plotas lygus išpjovos ir trikampio *AMB* plotų skirtumui.

Aukštinė: $h = r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

Styga: $s = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha$,

$S_{\text{nuopj}} = S_{\text{išpj}} - S_\Delta$.



Pavyzdžiai. Skritulinės išpjovos centrinis kampas $\alpha = 71°$ ir spindulys $r = 6{,}8$ cm.

Išpjovos plotas: $S_{\text{išpj}} = 3{,}14 \cdot (6{,}8 \text{ cm})^2 \cdot \sin\frac{71°}{360°} =$

$= 28{,}64 \text{ cm}^2$.

Aukštinė: $h = 6{,}8 \text{ cm} \cdot \cos\frac{71°}{2} = 5{,}54$ cm.

Stygos ilgis: $s = 2 \cdot 6{,}8 \text{ cm} \cdot \sin\frac{71°}{2} = 7{,}90$ cm.

Trikampio plotas: $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot (6{,}8 \text{ cm})^2 \cdot \sin 71° = 21{,}96 \text{ cm}^2$.

Nuopjovos plotas:

$S_{\text{nuopj}} = 28{,}64 \text{ cm}^2 - 21{,}96 \text{ cm}^2 = 6{,}68 \text{ cm}^2$.

Kiek laipsnių turi lankas, kurio ilgis lygus spinduliui?

$$r = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°} \Leftrightarrow 1 = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°} \Leftrightarrow \alpha = \frac{180°}{\pi} \Rightarrow \alpha = 57{,}3°.$$

Tarkime, kad apie Žemės pusiaują apvyniotas prie Žemės paviršiaus prigludęs laidas. Po to laidas pailgintas 1 m, jam suteikta apskritimo forma ir jis vėl apjuostas apie Žemės pusiaują. Koks yra atstumas tarp laido ir Že-

mės paviršiaus? Pažymėjus Žemės spindulį R ir atstumą tarp įtempto laido bei Žemės paviršiaus x, galima sudaryti tokią lygybę:

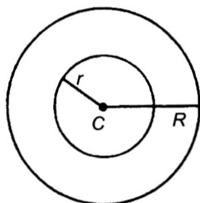
$$1+2\pi R=2\pi(R+x)\Leftrightarrow 1+2\pi R=2\pi R+2\pi x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=2\pi x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2\pi}\Rightarrow x\approx 0{,}16.$$

Įtemptas laidas bus nutolęs nuo Žemės pusiaujo 16 cm atstumu.

Skritulinis žiedas

Apskaičiuojant skritulinio žiedo plotą, reikia iš didesnio skritulio ploto atimti mažesniojo skritulio plotą. Be to, skrituliai neprivalo būti koncentriniai.



$$S=\pi R^2-\pi r^2.$$

Pavyzdžiai. Reikia apskaičiuoti skritulinio žiedo plotą, kai išorinio skritulio spindulys 10 cm, o vidinio 5 cm.

$$S=\pi(10\text{ cm})^2-\pi(5\text{ cm})^2=(100-25)\pi\text{ cm}^2=236\text{ cm}^2.$$

Koks yra skritulio spindulys, kai jo plotas lygus šio žiedo plotui?

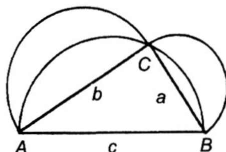
$$236\text{ cm}^2=\pi r^2\Rightarrow r=\sqrt{\frac{236\text{ cm}^2}{\pi}}\Rightarrow r\approx 8{,}67\text{ cm}.$$

Hipokrato mėnuliai

Nubrėžti pusskrituliai, kurių skersmenys yra stačiojo trikampio kraštinės. Reikia rasti taip gautų dviejų mėnulių bendrąjį plotą.

Pusskritulio, kurio skersmuo c, plotas $S_c=\frac{\pi c^2}{8}$.

Pusskritulio, kurio skersmuo a, plotas $S_a=\frac{\pi a^2}{8}$.



Pusskritulio, kurio skersmuo b, plotas $S_b = \frac{\pi b^2}{8}$.

Trikampio plotas: $S_\Delta = \frac{ab}{2}$.

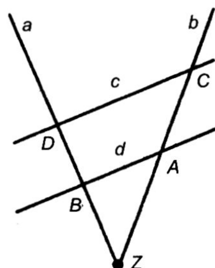
Visas plotas: $S = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} + \frac{ab}{2}$.

Abiejų mėnulių plotas: $S_m = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} + \frac{ab}{2} - \frac{\pi c^2}{8} =$

$= \frac{\pi}{8}\left(a^2 + b^2 - c^2\right) + \frac{ab}{2} = \frac{\pi}{8}\left(c^2 - c^2\right) + \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}$.

Abiejų mėnulių bendras plotas yra toks pat, kaip ir stačiojo trikampio.

8.13. Atkarpų santykiai



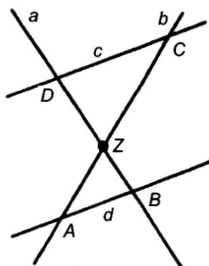
Figūra V

Talio teorema

Jei dvi taške Z susikertančias tieses a ir b kerta dvi lygiagrečiosios tiesės c ir d, tai tiesėje a atkirstos atkarpos yra proporcingos tiesėje b atkirstoms atkarpoms.

1 teorema

$$ZC : ZA = ZD : ZB.$$



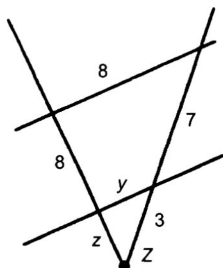
Figūra X

2 teorema

$$ZC : ZA = DC : AB,$$
$$ZD : ZB = DC : AB.$$

Teorema, atvirkštinė Talio teoremai, dažnai naudojama norint pagrįsti dviejų tiesių lygiagretumą. Ji skamba šitaip: jeigu dvi tiesės kerta kampo kraštines taip, kad jose atkirstos atitinkamos atkarpos yra proporcingos, tai tos dvi tiesės yra lygiagrečiosios.

Pavyzdys. Pasinaudojant greta paveiksle pateiktais duomenimis, reikia rasti atkarpas y ir z.

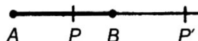


$$\frac{10}{3}=\frac{8+z}{z} \Leftrightarrow 10z=3(8+z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10z=24+3z \Leftrightarrow z=3,43,$$
$$\frac{10}{3}=\frac{8}{y} \Leftrightarrow 10y=24 \Leftrightarrow y=2,4.$$

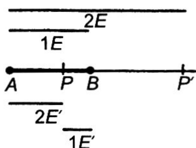
Atkarpos dalijimas

Atkarpos dalijimas nurodytuoju santykiu

P yra vidinis atkarpos AB taškas, o taškas P' yra jos tęsinyje. Sakoma, jog P dalija atkarpą AB iš vidaus, o P' – iš išorės. Santykis $AP : PB$, atitinkamai $AP' : P'B$ vadinamas santykiu, kuriuo dalijama atkarpa AB. Kai dalijimo taškas P yra vidinis atkarpos AB taškas, tai atkarpos AP ir PB yra vienodos krypties, todėl santykis yra teigiamasis skaičius. Kai dalijimo taškas P' yra atkarpos AB išorėje, tai atkarpos AP' ir $P'B$ yra priešingų krypčių, todėl santykis yra neigiamasis skaičius.

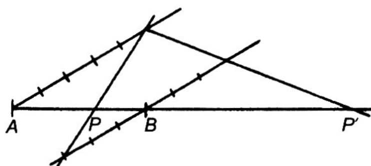


Harmoninis santykis. Taškai P ir P' dalija atkarpą AB harmoniniu santykiu, kai jie ją tiek iš vidaus, tiek iš išorės dalija tokiu pat santykiu.



(E ir E' – ilgio vienetai)

Pavyzdys. Nurodytoji atkarpa AB tiek iš vidaus, tiek iš išorės padalyta santykiu 5 : 3.
Brėžinys:



Paaiškinimas. Per A ir B nubrėžiamos bet kokios dvi viena su kita lygiagrečios tiesės. Tiesėje, nubrėžtoje per A, nuo A viena kryptimi atidedami 5 ilgio vienetai. Tiesėje, nubrėžtoje per B, nuo B abiem kryptimis atidedama po 3 ilgio vienetus. Gaunami taškai C, D, E. Tiesė CD kerta AB vidiniame taške P, tiesė CE kerta AB išoriniame taške P'.

Apskaičiavimas: AB = 12 cm, santykis $|k| = \frac{5}{3}$,

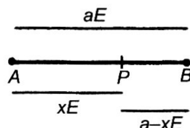
$AP = x, \quad BP' = y.$

$$\frac{x}{5} = \frac{12-x}{3} \Leftrightarrow 3x = 60 - 5x \Leftrightarrow 8x = 60 \Leftrightarrow x = 7{,}5,$$

$$\frac{12+y}{5} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow 36 + 3y = 5y \Leftrightarrow 2y = 36 \Leftrightarrow y = 18.$$

Tolydusis santykis. Taškas P dalija atkarpą AB tolydžiuoju santykiu (jis dar vadinamas aukso pjūviu), jeigu atkarpos ir jos didesnės dalies santykis yra lygus jos didesnės ir mažesnės dalies santykiui:

$$a : x = x : (a - x).$$



(E – ilgio vienetai)

Pavyzdys. Atkarpą a = 10 cm reikia padalyti tolydžiuoju santykiu. Raskime abiejų dalių ilgius (toliau skaičiuojant praleisti ilgio vienetai).

$$10 : x = x : (10 - x) \Leftrightarrow 10(10 - x) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 400}}{2},$$

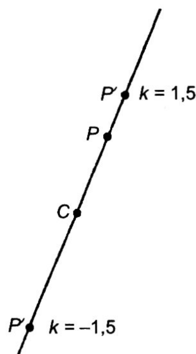
$x = 6{,}18$ cm, $\quad a - x = 3{,}82$ cm.

Kai atkarpa padalyta aukso pjūviu, mažesnioji jos dalis dalija didesniąją irgi aukso pjūviu, todėl toks santykis ir vadinamas tolydžiuoju. Šis santykis jau buvo žinomas Graikijoje VII a. pr. Kr. Iki šių dienų aukso pjūvis naudojamas statyboje, mene ir grafikoje.

8.14. Centrinis ištempis

Apibrėžimas

Tarkime, nurodytas taškas C (centras) ir pastovus skaičius $k \neq 0$ (ištempio koeficientas). Kiekvieną tašką P atitinka jo vaizdas P', esantis ištempio spindulyje, ir toks, kad $CP' : CP = k$. Kai $k > 0$, tai P' ir P yra toje pačioje pusėje nuo C, o kai $k < 0$, tai C yra tarp P ir P'.



Ištempiu gautos figūros yra panašios viena į kitą. Kiekviena tiesė transformuojama į su ja lygiagrečią tiesę. Ištempiu gauti kampai yra lygūs pradiniams. Apėjimo kryptis nesikeičia.

Ištempio koeficientas

$k > 1$: padidėjimas.

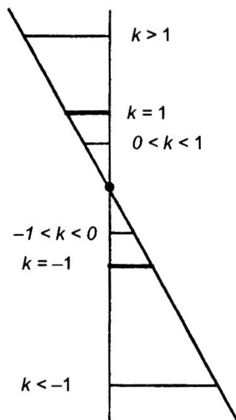
$k = 1$: tapatumas.

$0 < k < 1$: sumažėjimas.

$-1 < k < 0$: sumažėjimas kitoje pusėje.

$k = -1$: centrinė simetrija.

$k < -1$: padidėjimas kitoje pusėje.



Pavyzdys. Tarkime, nurodyti taškai Z ir P. Tašką P reikia atvaizduoti centriniu ištempiu, kurio koeficientas $k = 3 : 2$, $k = -2$. Pirmiausia nubrėžiame tiesę ZP. Po to per tašką Z bet kokiu kampu nubrėžiame pagalbinę tiesę ir joje atidedame 3 ilgio vienetus į vieną pusę ir 4 ilgio vienetus į kitą

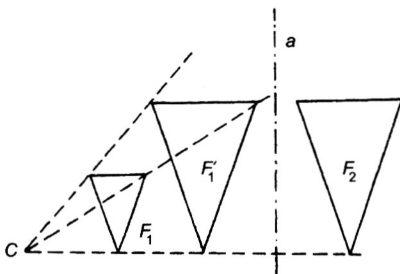
pusę. Nubrėžę lygiagrečiąsias tieses gauname kampą, perkirstą lygiagrečiosiomis tiesėmis. Pritaikę Talio teoremą galėsime pavaizduoti reikiamus santykius.

8.15. Panašumas

Panašumo atvaizdis

Centrinio ištempio ir kongruenčiojo atvaizdžio kompozicija vadinama panašumo atvaizdžiu. Jis vadinamas tos pačios krypties atvaizdžiu, jeigu figūrų apėjimo kryptis nepasikeičia, o jei pasikeičia, jis vadinamas priešingos krypties atvaizdžiu.

Pavyzdys. Panašumo atvaizdį sudaro ištempis ir ašinė simetrija.



Kai dvi figūros F_1 ir F_2 yra panašios, rašoma $F_1 \sim F_2$. Sakoma, kad jos yra tokios pat formos. Panašių figūrų atitinkamieji kampai yra vienodo didumo ir atitinkamųjų atkarpų ilgių santykiai yra lygūs. Jeigu F_1 ir F_2 – du daugiakampiai, o F_1 kraštinės yra k kartų ilgesnės už F_2 kraštines, tai F_1 plotas yra k^2 kartų didesnis už F_2 plotą.

Dvi atkarpos yra tolydžiai panašios, kai norint jas atvaizduoti vieną į kitą daugiausiai reikia dviejų ašinių simetrijų (vieno posūkio) ir vieno centrinio ištempio.

Du skrituliai yra tolydžiai panašūs, nes juos galima gauti vieną iš kito centriniu ištempiu.

Trikampių panašumo požymiai

Tarkime, nurodyti du trikampiai. Norint įsitikinti, kad jie panašūs, reikia ištirti, ar jie gaunami vienas iš kito ištempiu ir ašine simetrija (arba posūkiu).

Vis dėlto paprasčiau pritaikyti trikampių panašumo požymius.

Trikampiai yra panašieji, kai:

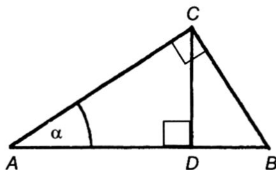
... turi po du lygius kampus;

... atitinkamųjų kraštinių santykiai yra vienodi;

... dviejų atitinkamųjų kraštinių santykiai vienodi ir tų kraštinių sudaromi kampai lygūs;

... dviejų atitinkamųjų kraštinių santykiai yra vienodi ir trikampiai turi po lygų kampą, esantį prieš didesniąją kraštinę.

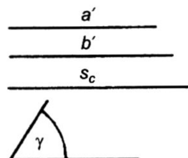
Pavyzdys. Trikampiai *CAD* ir *ABC* yra panašieji: $\Delta CAD \backsim \Delta ABC$. Jie turi po du lygius kampus: bendrą kampą α bei stačiuosius kampus *D* ir *C*.



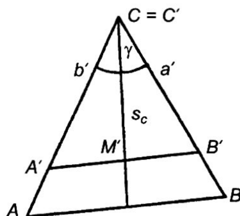
Panašumo metodo taikymas brėžimo uždaviniuose

Norint nubraižyti trikampį, reikia žinoti tris jo elementus. Kai vienas iš žinomų elementų nusakomas kraštinių santykiu, braižoma taip. Iš pradžių nubraižoma pagalbinė figūra, panaši į ieškomąją. Po to jai pritaikomas panašumo atvaizdis. Pagalbinę figūrą naudinga braižyti taip, kad atitinkamosios kraštinės būtų lygiagrečios. Tada reikės pritaikyti ašinę simetriją ir centrinį ištempį.

Pavyzdžiai. Reikia nubraižyti trikampį, kai žinomas kraštinių santykis $a : b = 4 : 5$, kampas γ ir pusiaukraštinė s_c.



Iš pradžių nubraižomas pagalbinis trikampis $A'B'C'$. Po to pritaikomas ištempis, kurio centras $C' = C$. Ištempio koeficientas lygus $\frac{s_C'}{s_C}$.



Braižymo planas

B', C': Šiuos taškus apibrėžia atkarpa a'.

A': 1. Iš taško C' atidedamas kampas γ.

2. Nubrėžiamas apskritimas $(C'; b')$.

M': Randamas atkarpos $A'B'$ vidurio taškas.

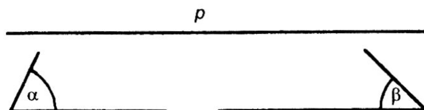
M: 1. Nubrėžiama tiesė $C'M'$.

2. Nubrėžiamas apskritimas $(C'; s_c)$.

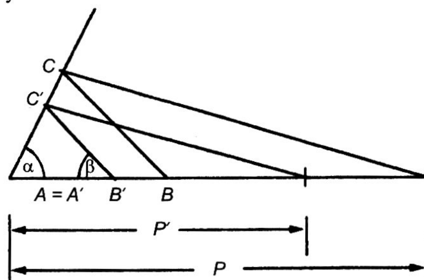
Ištempis, kurio centras $C' = C$.

Reikia nubraižyti trikampį, kai žinomas jo perimetras P, kampai α ir β.

Žinoma:



Brėžinys:



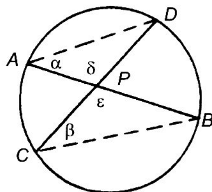
Braižymo planas

Nubraižomas pagalbinis trikampis $A'B'C'$, kurio du kampai lygūs nurodytiems, o kraštinės yra bet kokio ilgio. Tiesėje $A'B'$ atidedama atkarpa, kurios ilgis lygus pagalbinio trikampio perimetrui $P' = a' + b' + c'$. Figūrai pritaikomas centrinis ištempis, kurio centras $A' = A$ ir koeficientas $P' : P$.

Stygų teorema

Tarkime, kad apskritimo stygos AB ir CD susikerta taške P. Tada vienoje stygoje susidariusių atkarpų sandauga lygi kitoje stygoje susidariusių atkarpų sandaugai.

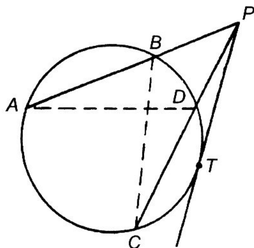
Teorema pagrindžiama taip. Kadangi trikampiai APD ir BPC turi po du lygius atitinkamuosius kampus $\delta = \varepsilon$ (kryžminiai kampai) ir $\alpha = \beta$ (įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką BD), tai šie trikampiai yra panašieji. Reikiama formulė gaunama iš panašiųjų trikampių atitinkamųjų kraštinių santykio.



Kirstinės teorema

Jeigu iš taško P, esančio šalia apskritimo, nubrėžtos kirstinės, tai kirstinės ir jos atkarpos nuo P iki apskritimo sandauga visoms kirstinėms yra vienoda.

Pagrindimas išplaukia iš trikampių ADP ir BCP panašumo.



Liestinės teorema

> Kirstinės ir jos atkarpos nuo taško P iki apskritimo sandauga yra lygi liestinės atkarpos nuo P iki lietimosi taško T kvadratui.

Liestinės teorema yra kirstinės teoremos atskiras atvejis, nes kirstinė CP, sukdamasi apie tašką P, virsta liestine, turinčia su apskritimu vieną bendrą lietimosi tašką T.

Šios trys teoremos dažnai taikomos, kai reikia stačiakampį pakeisti kitu tokio pat ploto stačiakampiu arba tokio pat ploto kvadratu.

Apolonijaus apskritimas

Trikampio vidaus kampo arba priekampio pusiaukampinė dalija priešais esančią kraštinę į dalis, proporcingas kitoms dviem kraštinėms:

$AP : BP = b : a$ ir $AP' : BP' = b : a$.

Kadangi abi per tašką C nubrėžtos pusiaukampinės sudaro statųjį kampą, iš to išplaukia tokia Apolonijaus teorema:

> visi taškai, nutolę nuo dviejų nurodytų taškų A ir B atstumais, kurių santykis $b : a$ yra visiems taškams vienodas, sudaro apskritimą (Apolonijaus apskritimą). Tai Talio apskritimas, kurio skersmuo yra atkarpa, jungianti taškus P ir P'. Šie taškai dalija AB iš vidaus ir iš išorės santykiu $b : a$.

9. Trigonometrija

Žodis „trigonometrija“ yra kilęs iš graikų kalbos ir reiškia trikampio kampų matavimą. Trigonometrija yra matematikos šaka, kurioje apskaičiuojant trikampių elementus panaudojamos trigonometrinės funkcijos, jei to reikia. Goniometrija – trigonometrijos sritis – nagrinėja trigonometrinių lygčių sprendimą.

9.1. Kampų matavimas

Matavimas yra palyginimas! Atkarpą išmatuojame, palygindami ją su fiksuoto ilgio atkarpa, kuri vadinama vienetine atkarpa. Norint išmatuoti kampą, reikia pirmiausia turėti vienetinį kampą. Jį galima apibūdinti skirtingai.

Statusis kampas

Susikirtus dviem tiesėms, susidaro keturi kampai. Kai jie visi lygūs vienas kitam, kalbama apie stačiuosius kampus. Statųjį kampą galima panaudoti kaip vienetinį kampą. Du statieji kampai sudaro ištiestinį kampą, keturi statieji kampai – pilnutinį kampą. Smailusis kampas – tai kampas, mažesnis už statųjį. Kampas yra bukasis, kai jis didesnis už statųjį ir mažesnis už ištiestinį.

Laipsninis matas

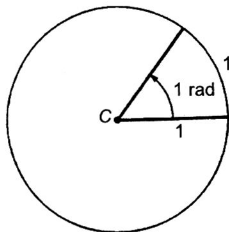
Vienu laipsniu (1°) vadinama 90-oji stačiojo kampo dalis. Todėl statusis kampas turi 90°, ištiestinis – 180° ir pilnutinis – 360°. Vartojami ir smulkesni kampo mato vienetai: 1 kampo minutė (1′) yra 60-oji laipsnio dalis, 1 kampo sekundė (1″) – 60-oji kampo minutės dalis. Taip pat įprasta laipsnius ir jų dalis išreikšti dešimtainės sistemos skaičiais.

Gradas

Vienas gradas (1 gon) yra 100-oji stačiojo kampo dalis, viena grado minutė (1^{g}) – 100-oji grado dalis, viena grado sekundė (1^{gg}) – 100-oji grado minutės dalis. Taigi statusis kampas turi 100 gon, ištiestinis kampas – 200 gon. Šiems kampo vienetams būdingi dešimtainio skirstymo privalumai.

Lanko matas

Apskritimas, kurio spindulys yra ilgio vienetas (pavyzdžiui, 1 m, 1 dm, 1 cm), vadinamas vienetiniu apskritimu. Centrinis tokio apskritimo kampas, besiremiantis į lanką, kurio ilgis lygus apskritimo spinduliui, apima 1 radianą (1 rad). Radianais išreikštas kampo didumas vadinamas lanko matu, jis yra bevardis skaičius:



1 rad = 1.

Pilnutinio kampo lanko matas lygus 2π, ištiestinio kampo – π, stačiojo kampo $\frac{\pi}{2}$ ir t. t. Lanko matas turi privalumų, nes jis kartu atspindi ir vienetinio apskritimo lanko ilgį.

Vienetiniame apskritime:

$360°$ atitinka lankas $2\pi \approx 6{,}2831$;

$180°$ atitinka lankas $\pi \approx 3{,}1416$;

$90°$ atitinka lankas $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$;

$60°$ atitinka lankas $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472$;

$45°$ atitinka lankas $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$;

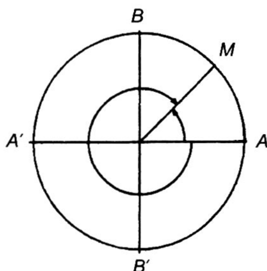
$30°$ atitinka lankas $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$;

$1°$ atitinka lankas $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$.

Orientuotasis kampas

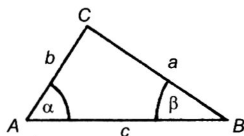
Nubrėžti du vienas kitam statmeni vienetinio apskritimo skersmenys AA' ir BB'. Tokiu būdu gauti laukai vadinami I, II, III ir IV ketvirčiais. Besisukantis spindulys su nejudančiu spinduliu OA sudaro įvai-

rius kampus. Kai spindulys sukamas prieš laikrodžio rodyklę, kampai yra teigiamai orientuoti. Kai sukama laikrodžio rodyklės kryptimi, gaunami neigiamai orientuoti kampai, jų matas išreiškiamas neigiamuoju skaičiumi. Kiekvieną realųjį skaičių galima interpretuoti kaip orientuotojo kampo lanko matą.



9.2. Stačiojo trikampio trigonometrinės funkcijos

Ilgesnioji stačiojo trikampio kraštinė vadinama įžambine. Ji yra prieš statųjį kampą. Statiniai – tai kraštinės, kurios sudaro statųjį kampą. Skiriami gretimasis (šalia smailiojo kampo esantis) ir priešinis (prieš jį esantis) statiniai.



Kampo α sinusas, kosinusas ir tangentas

Sinusas: $\sin\alpha = \dfrac{\text{priešinis statinis}}{\text{įžambinė}} = \dfrac{a}{c}.$

Kosinusas: $\cos\alpha = \dfrac{\text{gretimasis statinis}}{\text{įžambinė}} = \dfrac{b}{c}.$

Tangentas: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{priešinis statinis}}{\text{gretimasis statinis}} = \dfrac{a}{b}.$

Kampo β sinusas, kosinusas ir tangentas

Sinusas: $\sin\beta = \dfrac{\text{priešinis statinis}}{\text{įžambinė}} = \dfrac{b}{c}.$

Kosinusas: $\cos\beta = \dfrac{\text{gretimasis statinis}}{\text{įžambinė}} = \dfrac{a}{c}.$

Tangentas: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\text{priešinis statinis}}{\text{gretimasis statinis}} = \dfrac{b}{a}.$

Pavyzdžiai. Stačiojo trikampio β = 61° ir įžambinė c = 8,2 cm.

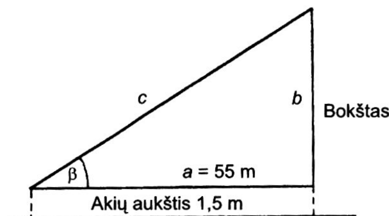
$$\sin 61° = 0,8746, \ \cos 61° = 0,4848, \ \mathrm{tg}\, 61° = 1,8040;$$

$$\sin 61° = 0,8746 = \frac{b}{8,2\ \mathrm{cm}} \Leftrightarrow b = 0,8746 \cdot 8,2\ \mathrm{cm};$$

$$\cos 61° = 0,4848 = \frac{a}{8,2\ \mathrm{cm}} \Leftrightarrow a = 0,4848 \cdot 8,2\ \mathrm{cm};$$

b = 7,17 cm, a = 3,98 cm.

Stebėtojas (jo akys yra 1,5 m aukštyje), nutolęs nuo bokšto pagrindo 55 m atstumu, mato bokšto viršūnę 69,23° kampu. Koks bokšto aukštis?



$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = a\ \mathrm{tg}\,\beta,$$

$$b = 55\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\, 69,23° = 55\ \mathrm{m} \cdot 2,6367 = 145\ \mathrm{m}.$$

Bokšto aukštis: h = 145 m + 1,5 m = 146,5 m.

Apie taisyklingąjį dvylikakampį, kurio kraštinės ilgis 4,3 cm, apibrėžtas apskritimas. Reikia rasti šio apskritimo spindulį ir dvylikakampio plotą.

$$\alpha = \frac{360°}{2 \cdot 12} = 15°;$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}, \ c = \frac{2,15\ \mathrm{cm}}{\sin 15°} = 8,3\ \mathrm{cm};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c\cos\alpha, \ b = 8,3\ \mathrm{cm} \cdot \cos 15° = 8\ \mathrm{cm};$$

$$S_\Delta = \frac{a \cdot b}{2}, \quad S_\Delta = \frac{2,15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = 8,6 \text{ cm}^2;$$

$$S_{12} = 24 \cdot 8,6 \text{ cm}^2 = 206,4 \text{ cm}^2.$$

Svarbiausios funkcijų reikšmės

Naudojantis lygiašoniais stačiaisiais trikampiais arba lygiakraščiais trikampiais, gaunamos tokios trigonometrinių funkcijų reikšmės:

α	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	neapibr.

9.3. Sąryšiai

Tiesiogiai iš stačiojo trikampio gaunami tokie sąryšiai:

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha), \quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$

Pagrindinės tapatybės:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Iš jų gaunamos formulės:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}};$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Pavyzdys. Stačiojo trikampio $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Reikia rasti $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}.$$

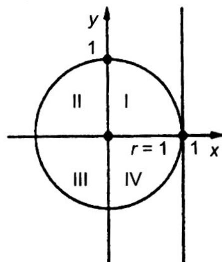
Šalia tangento dar vartojamas ir kotangentas:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

9.4. Bet koks kampas

Jei nagrinėtume tik stačiojo trikampio trigonometrines funkcijas, jų apibrėžimai ir sąryšiai galiotų tik smailiesiems kampams. Panaudojant vienetinį apskritimą, trigonometrinių funkcijų apibrėžimas išplėtojamas taip, kad jų sąryšiai yra teisingi bet kokiems kampams.

Nubrėžiamas vienetinis apskritimas (jo spindulys lygus 1 ilgio vienetui), kurio centras yra stačiakampės koordinačių sistemos pradžios taškas. Figūra papildoma liestine (tangentų ašimi), nubrėžta statmenai abscisių ašiai.



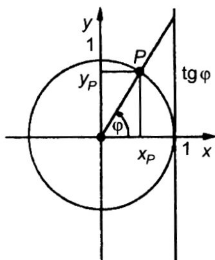
Pirmojo ketvirčio kampų trigonometrinės funkcijos

Kiekvieną vienetinio apskritimo tašką P atitinka kampas φ (kampas tarp teigiamos ašies Ox krypties ir atkarpos OP). Taško P abscisė x yra kampo φ kosinusas, o ordinatė y – sinusas. Tangentas vaizduojamas atkarpa tangentų ašyje.

$$\sin\varphi = \frac{y_P}{1} = y_P;$$

$$\cos\varphi = \frac{x_P}{1} = x_P;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y_P}{x_P}.$$



Neigiamieji kampai. Taip vadinami kampai, kurie gaunami sukant spindulį laikrodžio rodyklės kryptimi. Juos nesunku perskaičiuoti į teigiamuosius:

$-80° = 360° - 80° = +280°$; $-100° = 360° - 100° = +260°$.

Kitų ketvirčių kampų trigonometrinės funkcijos

Jas galima pakeisti pirmojo ketvirčio kampų funkcijomis, veidrodiškai atspindėjus nurodytus kampus (vieną arba daugiau kartų) ašies atžvilgiu. Trigonometrinių funkcijų ženklas nustatomas pagal taško *P* koordinačių ženklą. Taip taikant kampų atvaizdžius nereikia mokytis atskirų taisyklių.

Pavyzdžiai. $\varphi = 115°$: *P* yra II ketvirtyje. Veidrodiškai atspindėtas taškas *P'* apibūdina kampą $\varphi' = 65°$, $\sin 115° = \sin 65° = +0{,}9063$;

$\cos 115° = -\cos 65° = -0{,}4226$;

$\mathrm{tg}\,115° = -\mathrm{tg}\,65° = -2{,}1445$.

$\varphi = 220°$: *P* yra III ketvirtyje. Centrine simetrija (arba dviguba ašine simetrija) gautas taškas *P'* nusako kampą $\varphi' = 40°$.

$\sin 220° = -\sin 40° = -0{,}6428$;

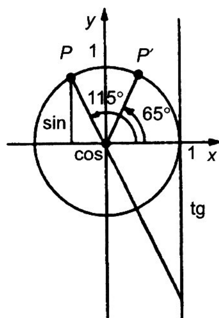
$\cos 220° = -\cos 40° = -0{,}7660$;

$\mathrm{tg}\,220° = \mathrm{tg}\,40° = 0{,}8391$.

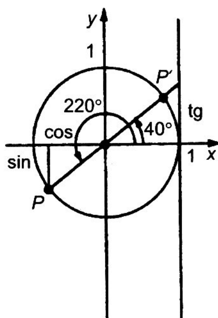
$\varphi = 330°$: *P* yra IV ketvirtyje. *P'* – taškas, gautas ašine simetrija, nusako kampą $\varphi' = 30°$.

$\sin 330° = -\sin 30° = -0{,}5000$;

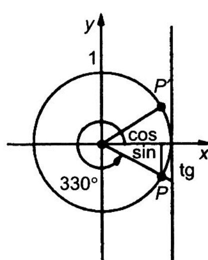
$\mathrm{tg}\,330° = -0{,}5774$.



II ketvirtis



III ketvirtis



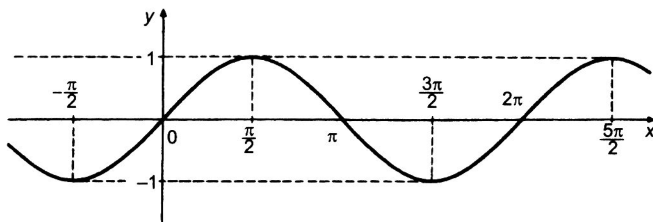
IV ketvirtis

Funkcijos

Funkcija sin x. Sinuso reikšmių priklausomybė nuo kampo lanko mato x išreiškiama tokia funkcija:

$$f: x \to \sin x,\ x \in \boldsymbol{R}, \text{ arba trumpiau } y = \sin x.$$

Funkcijos $y = \sin x$ grafikas vadinamas sinusoide ir atrodo taip:



Funkcija $y = \sin x$ yra periodinė, jos periodas lygus 2π.

Taigi:

$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \ldots$, trumpiau $\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$; čia $k \in \boldsymbol{Z}$.

Iš grafiko matyti, kad sinusoidė yra simetriška koordinačių pradžios atžvilgiu, taigi teisinga lygybė $\sin x = -\sin(-x)$.

Nubrėžus per tašką $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ statmenį ašiai Ox, gaunama sinusoidės

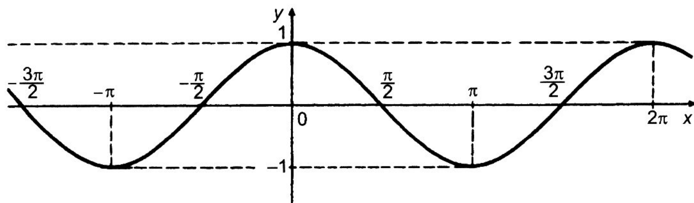
simetrijos ašis. Su visais $x \in \boldsymbol{R}$ teisinga lygybė $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Kai $D = \boldsymbol{R}$, funkcija $y = \sin x$ yra neapgręžiamoji, kadangi jos reikšmę y iš aibės $[-1;\ 1]$ atitinka ne viena, o daug $x \in \boldsymbol{R}$ reikšmių. Tačiau parinkus aibės $\boldsymbol{R}$ poaibį $D=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ funkcija $f: x \to \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ tampa apgręžiamąja. Atvirkštinė funkcija žymima taip: $f^*: x \to \arcsin x,\ x \in [-1;\ 1]$.

Funkcija $\cos x$. Kosinuso reikšmių priklausomybė nuo kampo lanko mato x išreiškiama tokia funkcija:

$f: x \to \cos x,\ x \in \boldsymbol{R}$, arba trumpiau $y = \cos x$.

Funkcijos $y = \cos x$ grafikas vadinamas kosinusoide ir atrodo taip:



Funkcija $y = \cos x$ yra periodinė, jos periodas lygus 2π.

Taigi:

$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \ldots$, trumpiau

$\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$; čia $k \in \boldsymbol{Z}$.

Iš grafiko matyti, kad kosinusoidė yra simetriška ašies *Oy* atžvilgiu, taigi teisinga lygybė $\cos x = \cos(-x)$.

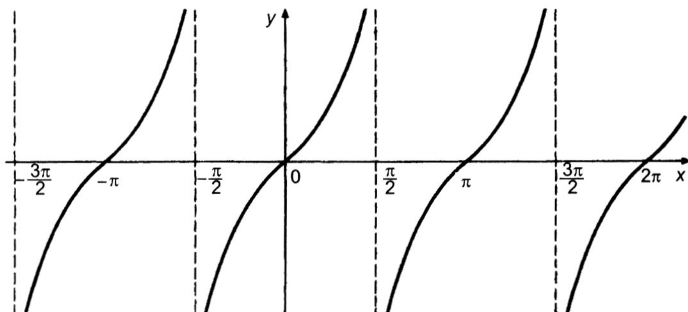
Kai $D = \boldsymbol{R}$, funkcija $y = \cos x$ yra neapgręžiamoji, kadangi jos reikšmę y iš aibės $[-1;\ 1]$ atitinka ne viena, o daug $x \in \boldsymbol{R}$ reikšmių. Tačiau parinkus aibės $\boldsymbol{R}$ poaibį $D = [0;\ \pi]$ funkcija $f: x \to \cos x,\ x \in [0;\ \pi]$ tampa apgręžiamąja. Atvirkštinė funkcija žymima taip:

$f^*: x \to \arccos x,\ x \in [-1;\ 1]$.

Funkcija tg x. Tangento reikšmių priklausomybę nuo kampo lanko mato x išreiškia tokia funkcija:

$$f: x \to \operatorname{tg} x,\ x \in D, \text{ arba trumpiau } y = \operatorname{tg} x.$$

Funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ grafikas vadinamas tangensoide ir atrodo taip:



Iš grafiko matyti, kad reikšmės $x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ ...,$ arba trumpiau $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, kai $k \in \boldsymbol{Z}$, pašalintos iš apibrėžimo srities. Todėl $D = \boldsymbol{R} \setminus \left\{x = \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Funkcija $y = \operatorname{tg} x$ yra periodinė, jos periodas lygus π, taigi $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x+2\pi) = ...$, trumpiau $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+k\pi)$.

Iš grafiko matyti, kad tangensoidė yra simetriška koordinačių pradžios atžvilgiu, taigi $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$. Funkcija $y = \operatorname{tg} x$ apibrėžimo srityje D yra neapgręžiamoji, nes jos reikšmę y atitinka ne viena, o kelios $x \in D$ reikšmės. Tačiau parinkus $D_1 = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, funkcija $f: x \to \operatorname{tg} x$, $x \in D_1$ tampa apgręžiamąja. Atvirkštinė funkcija žymima taip: $f^*: x \to \operatorname{arctg} x,\ x \in \boldsymbol{R}$.

9.5. Sudėties teoremos

Taip vadinamos formulės, kuriose kampų sumos arba skirtumo trigonometrinės funkcijos išreiškiamos atskirų kampų trigonometrinėmis funkcijomis. Jos taikomos sprendžiant trigonometrines lygtis.

Pagrindinės formulės

Sumos:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Skirtumo:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Pavyzdžiai: $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\pi\cdot\sin\frac{\pi}{6}=$

$$=(-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,15^\circ=\mathrm{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\mathrm{tg}\,45^\circ-\mathrm{tg}\,30^\circ}{1+\mathrm{tg}\,45^\circ\cdot\mathrm{tg}\,30^\circ}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}.$$

Atskirieji atvejai

Dvigubo argumento funkcijos:

$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Pusės argumento funkcijos:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos\alpha);$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot(1+\cos\alpha);$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Pavyzdžiai: $\mathrm{tg}\,120°=\mathrm{tg}(2\cdot 60°)=\dfrac{2\cdot\mathrm{tg}\,60°}{1-\mathrm{tg}^2 60°}=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3};$

$$2\cdot\sin^2 22{,}5°=2\cdot\sin^2\frac{45°}{2}=1-\cos 45°=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin 22{,}5°=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$2\cdot\cos^2\frac{\pi}{12}=1+\cos\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Iš pagrindinių formulių gaunamos kitos formulės, naudingos sprendžiant trigonometrines lygtis.

Sumos keitimas sandauga

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Pavyzdžiai: $\sin 3x+\sin x=2\cdot\sin\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2}=2\cdot\sin 2x\cdot\cos x;$

$$\cos 75°-\cos 15°=-2\sin\frac{75°+15°}{2}\cdot\sin\frac{75°-15°}{2}=$$

$$=-2\sin 45°\cdot\sin 30°=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sandaugos keitimas suma

$$2\cdot\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta);$$
$$2\cdot\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta);$$
$$2\cdot\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta).$$

Pavyzdžiai: $\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)=\frac{1}{2}\cdot(\sin(\cos^2 x-\sin^2 x)+$

$+\sin(\cos^2 x+\sin^2 x))=\frac{1}{2}\cdot(\sin(\cos 2x)+\sin 1);$

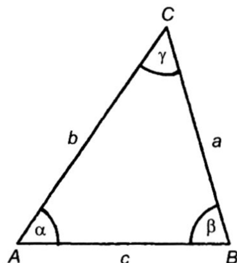
$2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2x\right)=\frac{1}{2}\cdot\cos 2x.$

9.6. Bet kokio trikampio trigonometrinės funkcijos

Sinusų teorema

Dviejų kampų sinuso reikšmių santykis lygus prieš tuos kampus esančių kraštinių santykiui:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$



Kosinusų teorema

Taip vadinamas Pitagoro teoremos, pritaikytos bet kokiam trikampiui, plėtinys.

Kosinusų teorema:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha;$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma.$$

Pavyzdys. Trikampio b = 7,2 cm, c = 9,4 cm, α = 39,7°.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha\Rightarrow a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha},$

$a=\sqrt{51,8+88,4-2\cdot 7,2\cdot 9,4\cdot\cos 39,7^\circ}$ cm $=6$ cm.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow \sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a},$$

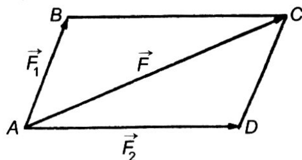
$$\sin\beta=\frac{7{,}2\text{ cm}\cdot\sin 39{,}7°}{6\text{ cm}}=0{,}767\Rightarrow\beta=50°,$$

$$\gamma=180°-39{,}7°-50°=90{,}3°.$$

Dvi jėgos $\vec{F_1}$ ir $\vec{F_2}$, kurių didumai $F_1 = 43$ N ir $F_2 = 64$ N, veikia tašką. Atstojamosios jėgos didumas $F = 73$ N. Kokį kampą viena su kita sudaro jėgos $\vec{F_1}$ ir $\vec{F_2}$? Koks kampo $\alpha=\angle\left(\vec{F_1},\ \vec{F}\right)$ didumas?

Nurodyta (nerašant vienetų):

$AB = c = 43$,
$BC = a = 64$,
$AC = b = 73$.



Kosinusų teorema:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\Leftrightarrow\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos\beta=\frac{64^2+43^2-73^2}{2\cdot 43\cdot 64}=\frac{616}{5504}\Rightarrow\beta=83°34',$$

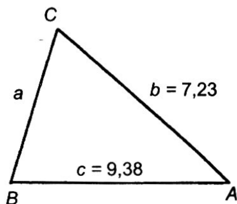
$$\varphi=180°-83°34'=96°26'.$$

Sinusų teorema:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\beta}{b},$$

$$\sin\alpha=\frac{64\cdot\sin 83°34'}{73}=0{,}8712\Rightarrow\alpha=60{,}6°=60°36'.$$

Trikampyje nurodyta:
$b = 7{,}23$,
$c = 9{,}38$,
$\alpha = 39°43'$.
Reikia rasti: a, β, γ.



Kosinusų teorema:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha},$$

$$a = \sqrt{52{,}27 + 87{,}98 - 2 \cdot 9{,}38 \cdot 7{,}23 \cdot \cos 39°43'},$$

$$a = \sqrt{35{,}93} \approx 6.$$

Sinusų teorema:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a},$$

$$\sin\beta = \frac{7{,}23 \cdot \sin 39°43'}{6} = 0{,}76999 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 50{,}35° = 50°21',$$

$$\gamma = 180° - 39°43' - 50°21' = 89°56'.$$

Ploto formulė

Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.

Ploto formulė:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin\gamma = \frac{1}{2}ac \sin\beta = \frac{1}{2}bc \sin\alpha.$$

Projekcijų teorema

Trikampio kraštinę sudaro dvi dalys, kurių kiekviena yra kitų dviejų kraštinių projekcija.

Projekcijų teorema:

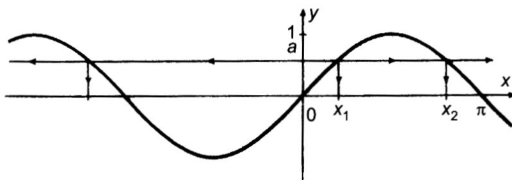
$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta;$$
$$b = c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma;$$
$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha.$$

9.7. Trigonometrinės lygtys

Lygtis, kurios nežinomieji yra trigonometrinių funkcijų nepriklausomieji kintamieji (argumentai), vadinama trigonometrine lygtimi. Kiekviena išsprendžiama trigonometrinė lygtis pertvarkiais pakeičiama į pagrindinę lygtį.

Pagrindinės lygtys

$$\sin x = a,\ a \in [-1;\ 1].$$



Paveiksle pavaizduotas funkcijos sin *x* grafikas bei tiesė, nubrėžta lygiagrečiai su ašimi *Ox* ir nutolusi nuo jos atstumu *a*. Lygties sprendiniai gaunami suprojektavus į ašį *Ox* tiesės ir sinusoidės susikirtimo taškus.

Pavyzdžiai. $\sin x = 0{,}64 \Rightarrow x_1 = 0{,}69$ (kampas, išreikštas lanko matais).

Sprendinių aibė $L_1 = \{x;\ \text{čia}\ x = 0{,}69 + 2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$.

Taip pat $x_2 = \pi - x_1$ yra lygties sprendinys, todėl dar turime sprendinių aibę

$L_2 = \{x;\ \text{čia}\ \ x = (\pi - 0{,}69) + 2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$.

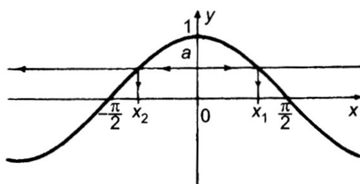
$\sin x = 0 \Rightarrow L = \{x;\ \text{čia}\ \ x = k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$,

$\sin x = 1 \Rightarrow L = \left\{x;\ \text{čia}\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\right\}$,

$\sin x = -1 \Rightarrow L = \left\{x;\ \text{čia}\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\right\}$.

$$\cos x = a,\ a \in [-1;\ 1].$$

Ir šį kartą sprendiniai gaunami suprojektavus į ašį *Ox* tiesės bei kosinusoidės susikirtimo taškus.



Pavyzdžiai. $\cos x = -0,85 \Leftrightarrow \cos(\pi - x) = 0,85 \Rightarrow \pi - x = 0,56 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2,58.$

Kadangi kosinusoidė simetriška ašiai *Oy*, tai $x = -2,58$ irgi yra sprendinys.

Sprendinių aibė $L_1 = \{x;\ \text{čia}\ \ x = 2,58 + 2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$,

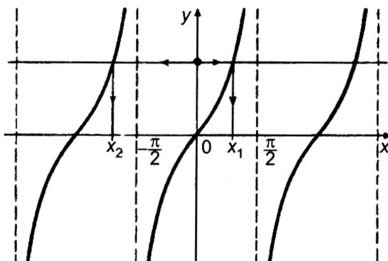
sprendinių aibė $L_2 = \{x;\ \text{čia}\ \ x = -2,58 + 2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$.

$\cos x = 0 \Rightarrow L = \left\{x;\ \text{čia}\ \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\right\}$,

$\cos x = 1 \Rightarrow L = \{x;\ \text{čia}\ \ x = 2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$,

$\cos x = -1 \Rightarrow L = \{x;\ \text{čia}\ \ x = (2k-1)\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$.

$\operatorname{tg} x = a,\ a \in \boldsymbol{R}.$



Pavyzdžiai: $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow L = \{x;\ \text{čia}\ \ x = k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$;

$\operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow L = \{x;\ \text{čia}\ \ x = 1,11 + k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$;

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(-x) = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow L = \left\{x;\ \text{čia}\ \ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Lygtys, sprendžiamos jas ekvivalenčiai pertvarkant

Kai negalima išsyk surasti trigonometrinės lygties sprendinių aibės, lygtis ekvivalenčiais pertvarkiais keičiama į kitą, kol gaunama pagrindinė lygtis.

Pavyzdžiai: $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x-\frac{1}{2}=0 \vee \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0,$$

$$\sin x-\frac{1}{2}=0 \vee \operatorname{tg} x=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \vee \operatorname{tg} x=1 \vee \operatorname{tg} x=-2,$$

$$L_1=\left\{x;\ \text{čia}\ \ x=(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$L_2=\left\{x;\ \text{čia}\ \ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$L_3=\{x;\ \text{čia}\ \ x=-1{,}11+k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\};$$

$$\operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+1=0 \wedge \operatorname{tg} x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{tg} x=2{,}618 \vee \operatorname{tg} x=0{,}382,$$

$$L_1=\{x;\ \text{čia}\, x=1{,}21+k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\},$$

$$L_2=\{x;\ \text{čia}\, x=0{,}365+k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\};$$

$$3\cos^3 x+4\sin^2 x+\cos x-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^3 x+4\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^3 x-4\cos^2 x+\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \left(3\cos^2 x-4\cos x+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee 3\cos^2 x-4\cos x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos x=\frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos x=1 \vee \cos x=\frac{1}{3},$$

$$\cos x=0 \Rightarrow L_1=\left\{x;\ \text{čia}\ \ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$\cos x=1 \Rightarrow L_2=\{x;\ \text{čia}\ \ x=2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\},$$

$$\cos x=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} L_3=\{x;\ \text{čia}\ \ x=1{,}23+2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}, \\ L_4=\{x;\ \text{čia}\ \ x=5{,}05+2k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}. \end{array}$$

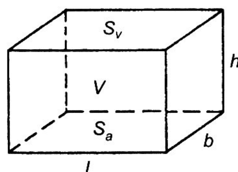
10. Stereometrija

10.1. Bendrosios taisyklės

Stereometrija yra Euklido geometrijos dalis. Ji nagrinėja erdvinių kūnų matavimą. Apsiribojus tik geometrinių figūrų nagrinėjimu plokštumoje gaunama planimetrija, kurią galima laikyti stereometrijos dalimi.

Žymėjimai:

l – ilgis,
b – plotis,
h – aukštinė,
S_a – apatinio pagrindo plotas,
S_v – viršutinio pagrindo plotas,
$S_š$ – šoninio paviršiaus plotas,
S – paviršiaus plotas,
V – tūris.



Kavaljerio teorema

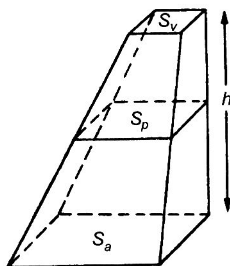
Kūnų, kurių pagrindo plotai ir aukštinės atitinkamai lygūs, tūriai yra vienodi, jeigu kiekviena lygiagreti su pagrindu plokštuma iškerta lygiapločius pjūvius.

Simpsono taisyklė

Bet kurio kūno, kurio apatinis ir viršutinis pagrindai yra lygiagretūs, tūrį galima apskaičiuoti pagal formulę

$$V = \frac{h}{6}\left(S_a + S_v + 4 \cdot S_p\right);$$

čia S_p – skersinio kūno pjūvio, nubrėžto per aukštinės vidurį, plotas.



Oilerio briaunainio teorema

Briaunainis yra kūnas, apribotas tik plokščiaisiais daugiakampiais.

$$e + f - k = 2;$$

čia e – viršūnių skaičius, f – sienų skaičius, k – briaunų skaičius.

Guldino teoremos

Sukinio tūris lygus skerspjūvio plotui S, padaugintam iš kelio, kurį apie sukimosi ašį nueina šio pjūvio svorio centras C.

Sukinio tūris:

$$V = S \cdot 2r_C \cdot \pi;$$

čia r_C – svorio centro atstumas nuo sukimosi ašies.

Sukinio šoninio paviršiaus plotas lygus sudaromosios ilgiui s, padaugintam iš kelio, kurį apie sukimosi ašį nueina sudaromosios svorio centras.

Šoninis sukinio paviršius:

$$S_š = s \cdot 2r_C \cdot \pi.$$

Sukinio paviršiaus plotas lygus skerspjūvį ribojančio kontūro perimetrui P, padaugintam iš kelio, kurį apie sukimosi ašį nueina kontūro svorio centras.

Sukinio paviršius:

$$S = P \cdot 2r_C \cdot \pi.$$

Sukinio statinis momentas lygus skerspjūvio plotui S, padaugintam iš svorio centro atstumo iki sukimosi ašies.

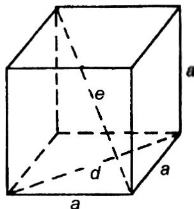
Sukinio statinis momentas:

$$M_{Ox} = r_C \cdot S.$$

10.2. Kubas, stačiakampis gretasienis, prizmė

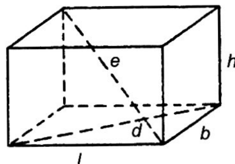
Kubas

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3;$$
$$S = 6 \cdot a^2;$$
$$d = a \cdot \sqrt{2};$$
$$e = a \cdot \sqrt{3}.$$



Stačiakampis gretasienis

$$V = lbh;$$
$$S = 2(lb + lh + bh);$$
$$d = \sqrt{l^2 + b^2};$$
$$e = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}.$$



Pavyzdžiai. Stačiakampio gretasienio matmenys: l = 8 cm, b = 2 cm, h = 12 cm.

Pagrindo plotas: $S_a = 8 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$.

Tūris: $V = 8 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 192 \text{ cm}^3$.

Paviršiaus plotas: $S = 2 \cdot (8 \cdot 2 \text{ cm}^2 + 8 \cdot 12 \text{ cm}^2 +$ $+ 2 \cdot 12 \text{ cm}^2) = 272 \text{ cm}^2$.

Pagrindo įstrižainė: $d = \sqrt{(8 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2} = 8{,}25 \text{cm}$.

Kūno įstrižainė: $e = \sqrt{(8 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2} =$ $= 14{,}6 \text{ cm}$.

Kubo, pagaminto iš marmuro (1 cm^3 masė lygi 2,8 g), briaunos ilgis 30 cm. Reikia apskaičiuoti kubo tūrį ir masę.

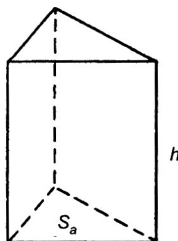
$V = (30 \text{ cm})^3 = 27\,000 \text{ cm}^3$.

$$m = 2{,}8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 27000 \text{ cm}^3 = 75600 \text{ g} = 75{,}6 \text{ kg}.$$

Prizmė (stačioji ir pasviroji)

Gaunama iškiliojo daugiakampio lygiagrečiuoju postūmiu erdvėje.

$$V = S_p \cdot h;$$
$$S = S_š + 2S_a.$$



Šoninio paviršiaus plotas lygus visų sienų plotų sumai.

Pavyzdys. Prizmės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statiniai $a = 9$ cm ir $b = 12$ cm.
Prizmės aukštinė lygi 20 cm. Raskime prizmės tūrį ir šoninį paviršių.

$$c = \sqrt{(9\ \text{cm})^2 + (12\ \text{cm})^2} = \sqrt{225\ \text{cm}^2} = 15\ \text{cm}.$$

Tūris:

$$V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{9\ \text{cm} \cdot 12\ \text{cm}}{2} \cdot 20\ \text{cm} = 1080\ \text{cm}^3.$$

Šoninio paviršiaus plotą sudaro trijų stačiakampių sienų plotų suma:

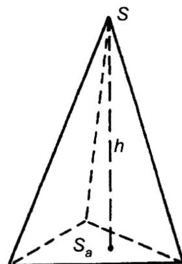
$$S_{\check{s}} = 9 \cdot 20\ \text{cm}^2 + 12 \cdot 20\ \text{cm}^2 + 15 \cdot 20\ \text{cm}^2 = 720\ \text{cm}^2.$$

10.3. Piramidė

Piramidė (statičioji ir pasviroji)

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_a \cdot h;$$
$$S = S_{\check{s}} + S_a.$$

Šoninio paviršiaus plotas lygus visų sienų plotų sumai.



Pavyzdys. Piramidės pagrindas yra lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė $a = 5$ cm.
Apskaičiuokime piramidės tūrį, kai jos aukštinė lygi 12 cm.
Pagrindo plotas:

$$S_a = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow S_a = \frac{(5\ \text{cm})^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 10{,}8\ \text{cm}^2.$$

Tūris:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10{,}8\ \text{cm}^2 \cdot 12\ \text{cm} = 43{,}2\ \text{cm}^3.$$

Nupjautinė piramidė

Tai apatinė piramidės dalis, kurią nuo jos nukerta su pagrindu lygiagreti plokštuma. S_a – apatinio pagrindo plotas, S_v – viršutinio pagrindo plotas, $S_{\check{s}}$ – šoninio paviršiaus plotas, h – nupjautinės piramidės aukštinė.

$$V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(S_a+\sqrt{S_a\cdot S_v}+S_v\right);\ S=S_a+S_v+S_š.$$

Pavyzdys. Nupjautinės piramidės aukštinė lygi 4 cm, jos pagrindai yra kvadratai. Apatinio pagrindo kraštinė lygi 8 cm, viršutinio pagrindo kraštinė lygi 5 cm. Apskaičiuokime tūrį.

Apatinio pagrindo plotas: $S_a = 8\text{ cm}\cdot 8\text{ cm} = 64\text{ cm}^2$.

Viršutinio pagrindo plotas: $S_v = 5\text{ cm}\cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$.

$$V=\frac{4\text{ cm}}{3}\left(64\text{ cm}^2+\sqrt{64\text{ cm}^2\cdot 25\text{ cm}^2}+25\text{ cm}^2\right)=$$
$$=\frac{4\text{ cm}}{3}\left(64\text{ cm}^2+8\text{ cm}\cdot 5\text{ cm}+25\text{ cm}^2\right)=172\text{ cm}^3.$$

Tetraedras

Tai kūnas, apribotas lygiakraščiais trikampiais (briaunos ilgis a). Apie jį apibrėžto rutulio spindulys R, į jį įbrėžto rutulio spindulys r.

Tūris: $V=\frac{a^3}{12}\cdot\sqrt{2}$.

Paviršiaus plotas: $S=a^2\cdot\sqrt{3}$.

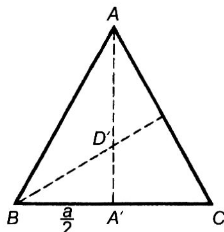
Aukštinė: $h=\frac{a}{3}\cdot\sqrt{6}$.

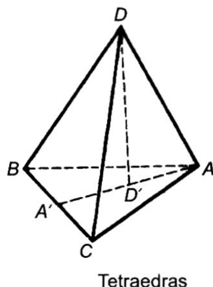
Apibrėžtinio rutulio spindulys: $R=\frac{a}{4}\cdot\sqrt{6}$.

Įbrėžtinio rutulio spindulys: $r=\frac{a}{12}\cdot\sqrt{6}$.

Pavyzdys. Tūrio ir paviršiaus ploto formulių išvedimas.

Keturios sienos yra lygiakraščiai trikampiai. Bet kurios sienos aukštinę pažymėkime h', tetraedro – h. Nagrinėjame pagrindo trikampį ABC:





Tetraedras

$$h' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Iš trikampių ABA' ir $BD'A'$ išplaukia, kad

$$\frac{\frac{a}{2}}{A'D'} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{A'D'} =$$

$$= \sqrt{3} \Leftrightarrow A'D' = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD' = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Aukštinė h randama iš trikampio DAD':

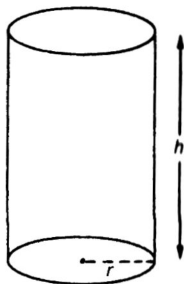
$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Paviršiaus plotas: $S = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

Tūris: $V = \frac{S_{ABC} \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

10.4. Ritinys, kūgis

Ritinys



Ritinys gaunamas sukant stačiakampį apie jo kraštinę.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot h;$$

$$S_š = 2r \cdot \pi \cdot h;$$

$$S = 2r \cdot \pi \cdot (r + h).$$

Pavyzdys. Ritinio spindulys lygus 4 dm, o aukštinė – 15 dm. Apskaičiuokime jo tūrį, pagrindo plotą ir šoninio paviršiaus plotą.

Tūris: $V = (4\text{ dm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 15\text{ dm} = 753{,}6\text{ dm}^3$.

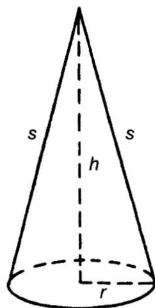
Pagrindo plotas: $S_a = (4\text{ dm})^2 \cdot 3{,}14 = 50{,}2\text{ dm}^2$.

Šoninio paviršiaus plotas:

$S_š = 8\text{ dm} \cdot 3{,}14 \cdot 15\text{ dm} = 377\text{ dm}^2$.

Statusis kūgis

Statusis kūgis gaunamas sukant statųjį trikampį apie jo statinį. Sudaromoji pažymėta s.



$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h;$$
$$S_š = r \cdot \pi \cdot s;$$
$$S = r \cdot \pi \cdot (r + s).$$

Pavyzdys. Stačiojo kūgio pagrindo skersmuo lygus jo aukštinei (9 cm). Apskaičiuokime tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

Tūris: $V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (4{,}5\text{ cm})^2 \cdot 9\text{ cm} = 191\text{ cm}^3$.

Sudaromoji: $s^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow s = \sqrt{r^2 + h^2}$,

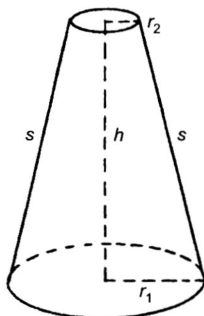
$s = \sqrt{(4{,}5\text{ cm})^2 + (9\text{ cm})^2} = 10{,}1\text{ cm}$.

Šoninio paviršiaus plotas:

$S_š = 4{,}5\text{ cm} \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}1\text{ cm} = 143\text{ cm}^2$.

Nupjautinis statusis kūgis

Tai apatinė kūgio dalis, kurią nuo jo nukerta su pagrindu lygiagreti plokštuma.

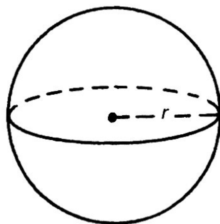


$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right);$$
$$S_š = \pi s(r_1 + r_2);$$
$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + S_š.$$

10.5. Rutulys

Visas rutulys

Rutulys gaunamas sukant pusskritulį apie jo skersmenį.



$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3;$$
$$S = 4\pi \cdot r^2.$$

Pavyzdžiai. Rutulio spindulys $r = 6{,}5$ cm.

$$V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}5\ \text{cm})^3 = 1149{,}8\ \text{cm}^3 = 1{,}15\ \text{dm}^3.$$

$$S = 4 \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}5\ \text{cm})^2 = 530{,}7\ \text{cm}^2.$$

Rutulio paviršiaus plotas lygus 20 m^2. Apskaičiuokime jo tūrį.

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{20\ \text{m}^2}{\pi}} = 1{,}26\ \text{m}.$$

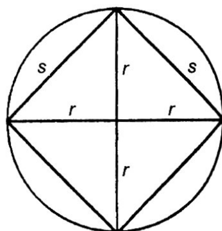
Rutulio tūris: $V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}26\ \text{m})^3 = 8{,}37\ \text{m}^3.$

Apie kvadratą apibrėžtas skritulys, kurio spindulys r. Sukant figūrą apie kvadrato įstrižainę gaunamas rutulys ir dvigubas kūgis. Apskaičiuokime abiejų kūnų paviršių plotų santykį.

Rutulio paviršiaus plotas: $S_r = 4r^2\pi$.

Kūgio sudaromosios ilgis: $s = r\sqrt{2}$.

Dvigubo kūgio paviršiaus plotas: $S_k = 2 \cdot r\pi s = 2 \cdot r\pi r\sqrt{2} = 2 \cdot r^2\pi\sqrt{2}$.



Santykis: $\frac{S_r}{S_k} = \frac{4r^2\pi}{2r^2\pi\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 1.$

Didysis skritulys, mažasis skritulys

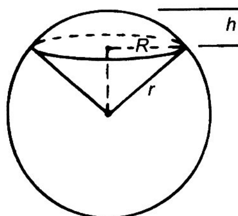
Perkirtus rutulį plokštuma, pjūvyje gaunamas skritulys. Kai kertančioji plokštuma eina per rutulio centrą C, gaunamas didysis skritulys, kurio spindulys lygus rutulio spinduliui r. Kai kertančioji plokštuma neina per rutulio centrą C, tai gaunamas mažasis skritulys, kurio spindulys $R < r$.

Rutulio skersmens galus pažymėkime P ir P'. Per šiuos taškus galima išvesti be galo daug rutulį kertančių plokštumų, taigi per taškus P ir P' eis be galo daug didžiųjų skritulių. Per du rutulio paviršiaus taškus A ir B, kurie nėra rutulio skersmens galai, eina tik vienas didysis skritulys. Trumpiausias kelias tarp dviejų rutulio paviršiaus taškų A ir B eina apskritimu, ribojančiu didįjį skritulį, nubrėžtą per taškus A ir B. Jis vadinamas sferiniu atstumu tarp taškų A ir B. Jį galima apibūdinti panaudojant centrinį kampą ACB.

10.6. Rutulio dalys

Rutulio išpjova

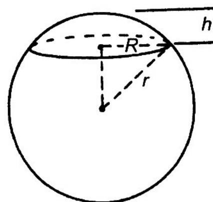
Atstumas nuo rutulio centro iki mažojo skritulio yra h, pjūvyje esančio mažojo skritulio spindulys – R.



$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h;$$
$$S = \pi \cdot r \cdot (2h + R).$$

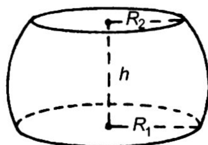
Rutulio nuopjova

h – nuopjovos aukštis, R – pjūvyje esančio skritulio spindulys.



$$V = \frac{1}{6}\pi h\left(3R^2 + h^2\right) \text{ arba:}$$
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h);$$
$$S_š = 2\pi rh.$$

Rutulio sluoksnis



h – atstumas tarp abiejų pjūviuose esančių skritulių, kurių spinduliai R_1 ir R_2.

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2\right);$$
$$S_{š} = 2\pi rh;$$
$$S = \pi\left(2rh + R_1^2 + R_2^2\right).$$

Pavyzdys. Iš rutulio išpjautas 3 cm aukščio sluoksnis. Pjūviuose esančių skritulių spinduliai lygūs 2,5 cm ir 5 cm. Apskaičiuokime sluoksnio tūrį.

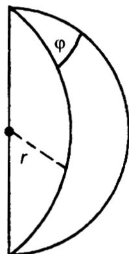
$$V = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 3\ \text{cm} \cdot \left(3 \cdot 2{,}5^2 + 3 \cdot 5^2 + 3^2\right)\ \text{cm}^2 =$$
$$= 1{,}57\ \text{cm} \cdot (18{,}75 + 75 + 9)\ \text{cm}^2 = 161{,}3\ \text{cm}^3.$$

Rutulio skiltis

Du didieji skrituliai padalija rutulį į keturias skiltis, kurios poromis yra tokio pat didumo. Kiekviena skiltis turi po dvi viršūnes, po dvi lygias sienas (tai skiltį ribojantys pusskrituliai), po du lygius kampus.

Skilties kampu vadinamas kampas, kurį sudaro per skilties viršūnę pusapskritimiams nubrėžtos liestinės, arba kampas, kurį sudaro didžiųjų skritulių plokštumos. Skilties kampas φ, jos lanko ilgis x.

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{\varphi}{360°};$$
$$V = \frac{2}{3}r^3 \cdot x;$$
$$S = 4\pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360°}.$$

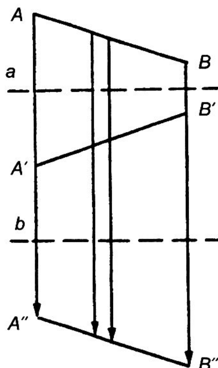


Kampo lanko matą su jo matu laipsniais susieja formulė

$$x = \frac{2\pi}{360} \cdot \varphi \approx 0{,}017\ \varphi.$$

11. Vektorinis skaičiavimas

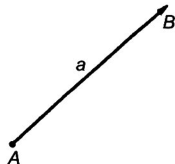
11.1. Lygiagretusis postūmis



Lygiagretusis postūmis yra dviejų ašinių simetrijų, kurių ašys lygiagrečios, kompozicija. Kiekvienas figūros taškas perstumiamas ta pačia kryptimi tokiu pat atstumu. Atkarpa, kurioje nurodyta kryptis, yra strėlė ir ji žymima rodykle. Kadangi taškus galima perstumti įvairiais atstumais, todėl strėlių, kurios gaunamos viena iš kitos lygiagrečiuoju postūmiu, šeima yra begalinė. Jos visos yra lygiagrečios ir vienodo ilgio.

11.2. Vektoriai

Apibrėžimas



Visų lygiagrečiuoju postūmiu gaunamų strėlių šeimos atstovas vadinamas vektoriumi.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, jo ilgis $|\vec{a}| = a$.

Vektoriaus $\vec{a}$ modulis arba ilgis nusakomas atkarpos ilgiu a. Šis dydis, apibrėžiamas vien tik skaitine reikšme, vadinamas skaliaru. Vienetiniu vektoriumi vadinamas vektorius, kurio ilgis 1. Paprastai vektoriams žymėti vartojamos pirmosios abėcėlės raidės – vektoriai žymimi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir t. t. Tačiau jie žymimi ir pasitelkiant paskutines abėcėlės raides: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$.

Vektorių rūšys

Spinduliai vektoriai: tai vektoriai, kurių visų pradžios taškas yra koordinačių sistemos pradžios taškas.

Nulinis vektorius: tai vektorius, kurio modulis lygus 0 (jis vaizduojamas tašku).

Kolineariejі vektoriai: tai vektoriai, kurie yra lygiagretūs su ta pačia tiese (jų moduliai nebūtinai lygūs).

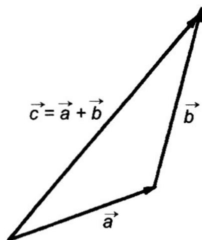
Komplanarieji vektoriai: tai vektoriai, esantys toje pačioje plokštumoje (jų moduliai nebūtinai lygūs).

Priešingieji vektoriai: tai vienodo modulio, bet priešingos krypties kolineariejі vektoriai.

11.3. Tiesinė vektorių erdvė

Veiksmai su vektoriais

Vektorių sudėtis. Du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudedami, vektoriaus $\vec{b}$ pradžią perkeliant į vektoriaus $\vec{a}$ galą. Suma yra vektorius $\vec{c}$, išeinantis iš vektoriaus $\vec{a}$ pradžios ir nukreiptas į vektoriaus $\vec{b}$ galą.

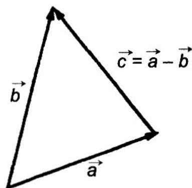


Vektorių sudėčiai būdingos tokios savybės:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right);$$
$$\vec{a}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{a}=\vec{a};$$
$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+(\vec{a})=\vec{O}.$$

Vektorių atimtis. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumas $\vec{a}-\vec{b}$ gaunamas prie vektoriaus $\vec{b}$ pridedant vektoriui $\vec{a}$ priešingą vektorių: $\vec{b}-\vec{a} = \vec{b}+(-\vec{a})$. Vektorių atimtis yra veiksmas, atvirkštinis vektorių sudėčiai.

Skirtumas $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ gaunamas patalpinant abiejų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ pradžios taškus į vieną tašką. Tada skirtumas $\vec{c}$ yra vektorius, išeinantis iš vektoriaus $\vec{a}$ galo ir nukreiptas į vektoriaus $\vec{b}$ galą.



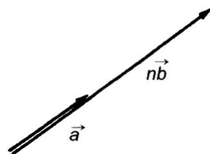
Adicinė vektorių grupė

Sudėjus du vektorius visada vėl gaunamas vektorius. Vadinasi, vektorių aibė yra uždaroji sudėties atžvilgiu. Vektorių sudėtis yra operacija, apibrėžta vektorių aibėje V. Prieš tai išvardytos sudėties savybės parodo, jog vektorių sudėčiai būdingi perstatomumo ir jungiamumo dėsniai, vektorių aibėje egzistuoja nulinis ir atvirkštinis elementas. Apibendrinant galima teigti, kad struktūra (V; +) yra Abelio grupė.

Vektoriaus daugyba iš skaliaro

Padauginus vektorių $\vec{a}$ iš realiojo skaičiaus n, gaunamas kolinearusis vektorius $\vec{b}$. Rašoma: $\vec{b} = n \cdot \vec{a}$.

$$|\vec{b}| = |n \cdot \vec{a}| = |n| \cdot |\vec{a}|.$$



$n \cdot \vec{a}$ ir $\vec{a}$ kryptis yra tokia pati, kai $n > 0$, ir priešinga, kai $n < 0$. $n \cdot \vec{a}$ yra nulinis vektorius, kai $n = 0$. Padauginus nulinį vektorių $\vec{O}$ iš realiojo skaičiaus $n \in \boldsymbol{R}$, vėl gaunamas nulinis vektorius $n \cdot \vec{O} = \vec{O}$.

Tiesinė vektorių erdvė

Pažymėkime: $\boldsymbol{R}$ – realiųjų skaičių aibė, V – vektorių aibė. Teisingos yra šios pagrindinės vektoriaus daugybos iš skaliaro savybės:

$$m, n \in \boldsymbol{R} \wedge \vec{a} \in V \Rightarrow m \cdot (n \cdot \vec{a}) = (m \cdot n) \cdot \vec{a};$$
$$m, n \in \boldsymbol{R} \wedge \vec{a} \in V \Rightarrow (m + n) \cdot \vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};$$
$$n \in \boldsymbol{R} \wedge \vec{a}, \vec{b} \in V \Rightarrow n \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = n \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b};$$
$$\vec{a} \in V \Rightarrow 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Realiųjų skaičių kūnas ($\boldsymbol{R}$, +, ·) ir adicinė Abelio vektorių grupė yra dvi algebrinės struktūros, iš kurių, panaudojant vektoriaus daugybą iš skaliaro su prieš tai išvardytomis jos savybėmis, gaunama nauja struktūra, kuri vadinama tiesine vektorių erdve.

Vektorių sudėties, atimties ir daugybos iš skaliaro veiksmai, kaip vektorių lygumo sąryšiai, liudija, jog šioms operacijoms būdingos tokios pačios savybės, kokios joms būdingos skaičių algebroje. Tai reiškia, kad galima nagrinėti vektorines lygtis ir jas spręsti ekvivalenčiai pertvarkant.

Pavyzdys. Ekvivalenčiais pertvarkiais reikia vektorinę lygtį išspręsti $\vec{a}$ atžvilgiu.

$$2 \cdot \vec{a} - \left(3 \cdot \vec{b} - \vec{a}\right) = 3 \cdot \vec{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} + \vec{a} = 3 \cdot \vec{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} = 3 \cdot \vec{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}.$$

11.4. Tiesinis priklausomumas

Tiesinis priklausomumas tiesėje

Kai $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ yra du kolinearieji vektoriai, kurių bent vienas yra nenulinis, tai egzistuoja realusis skaičius $k_1 \in \boldsymbol{R}$, su kuriuo

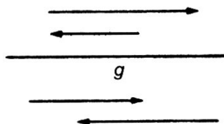
$$\boxed{\vec{v}_2 = k_1 \vec{v}_1.}$$

Sakoma: „$\vec{v}_2$ yra tiesinis $\vec{v}_1$ darinys“ arba: „$\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ yra tiesiškai priklausomi“. Du nekolinearieji vektoriai taip pat yra netiesiškai priklausomi, todėl sakoma, jog jie yra tiesiškai nepriklausomi.

Pavyzdžiai. Bet koks vektorius $\vec{v}$ ir nulinis vektorius $\vec{O}$ yra tiesiškai priklausomi, nes $\vec{O} = 0 \cdot \vec{v}$. Bet koks vektorius $\vec{v}$ ir jam priešingas vektorius $-\vec{v}$ yra tiesiškai priklausomi, nes $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$.

Du lygūs vektoriai $\vec{v}$ ir $\vec{v}$ yra tiesiškai priklausomi, nes $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$.

Visi vektoriai, kurių atstovai yra lygiagretūs su ta pačia tiese g, sudaro ekvivalenčiąją kolineariųjų vektorių klasę. Kai $\vec{v}$ yra šios klasės nenulinis vektorius, tai



kiekvieną šios klasės vektorių galima išreikšti tiesiniu vektoriaus $\vec{v}$ dariniu. $\vec{v}$ vadinamas tiese g apibrėžiamu ekvivalenčiosios kolineariųjų vektorių klasės baziniu vektoriumi (vektoriai $\vec{v}$ sudaro vienmatę vektorinę erdvę).

Tiesinis priklausomumas plokštumoje

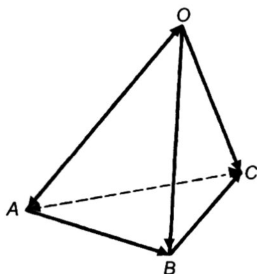
Kai $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ yra du bet kokie komplanariųjų vektorių klasės nekolinearieji vektoriai, tai kiekvieną tos klasės trečią vektorių $\vec{v}_3$ atitinka du realieji skaičiai k_1, $k_2 \in \boldsymbol{R}$, su kuriais

$$\vec{v}_3 = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 .$$

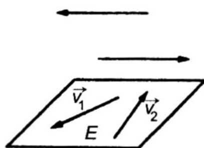
$\vec{v}_3$ yra $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ tiesinis darinys. Vektoriai $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ yra tiesiškai priklausomi.

Pavyzdys. Piramidės $ABCO$ briaunose esantys vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra nekomplanarieji, taigi tiesiškai nepriklausomi. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CA}$ yra komplanarieji, taigi tiesiškai priklausomi. Teisinga, pavyzdžiui, tokia lygybė:

$$\overrightarrow{CA} = (-1)\cdot\overrightarrow{AB} + (-1)\cdot\overrightarrow{BC}.$$



Plokštuma E vektorių aibėje apibrėžia ekvivalenčiąją komplanariųjų vektorių klasę. Kai $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ yra bet kurie nekolinearieji vektoriai, taigi tiesiškai nepriklausomi šios klasės vektoriai, kiekvieną tos klasės vektorių galima išreikšti $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ tiesiniu dariniu. Vektoriai $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ vadinami baziniais šios klasės vektoriais, jie sudaro plokštumos E bazę.

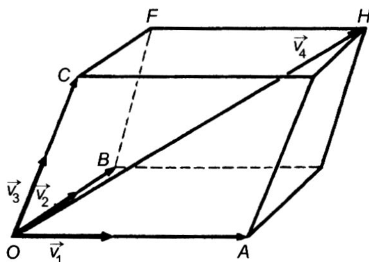


Tiesinis priklausomumas erdvėje

Kai $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ir $\vec{v}_3$ yra trys nekomplanarieji, taigi tiesiškai nepriklausomi vektoriai, kiekvieną kitą vektorių galima išreikšti tiesiniu šių vektorių dariniu. Kiekvieną vektorių $\vec{v}_4$ atitinka trys skaičiai $k_1, k_2, k_3 \in \boldsymbol{R}$, su kuriais

$$\vec{v}_4 = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3.$$

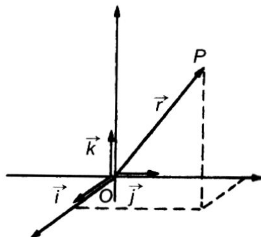
Keturi vektoriai yra tiesiškai priklausomi.



Trys vektoriai $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ir $\vec{v}_3$ vadinami baziniais vektoriais, jie sudaro erdvės bazę. Kadangi pakanka trijų nepriklausomų vektorių norint kiekvieną erdvės V vektorių išreikšti šių trijų vektorių tiesiniu dariniu, sakoma, jog V yra trimatė vektorinė erdvė.

11.5. Vektoriaus reiškimas koordinatėmis

Erdvės koordinačių sistema



Stačiakampę Dekarto erdvės koordinačių sistemą sudaro trys viena kitai poromis statmenos ašys, turinčios tą patį pradžios tašką O. Vienetiniai ašių vektoriai $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sudaro dešininę sis-

temą. Vektoriai $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ yra nekomplanarieji, taigi tiesiškai nepriklausomi, ir sudaro erdvės bazę. Kiekvieną erdvės vektorių galima išreikšti šiais trimis baziniais vektoriais.

Vektoriaus išreiškimas komponentėmis

Vektoriaus projekcijos koordinačių ašyse apibūdina vektoriaus komponentes:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z.$$

Vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės:

$$|\vec{a}_x| = a_x, \quad |\vec{a}_y| = a_y, \quad |\vec{a}_z| = a_z.$$

Vektoriaus užrašymas eilute ir stulpeliu:

$$\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Vienetinių vektorių išreiškimas koordinatėmis:

$$\vec{i} = (1;\ 0;\ 0), \quad \vec{j} = (0;\ 1;\ 0), \quad \vec{k} = (0;\ 0;\ 1).$$

Sudėtis ir atimtis

Vektoriai sudedami ir atimami, sudedant ir atimant atitinkamas jų koordinates:

$$\vec{v}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1),\ \vec{v}_2 = (x_2;\ y_2;\ z_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2).$$

Pavyzdys: $\vec{v}_1 = (4;\ 8;\ -2),\ \vec{v}_2 = (3;\ -1;\ -4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (7;\ 7;\ -6),\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (1;\ 9;\ 2).$

Vektoriaus daugyba iš skaliaro

Dauginant vektorių iš skaliaro, reikia iš to skaliaro padauginti kiekvieną vektoriaus koordinatę:

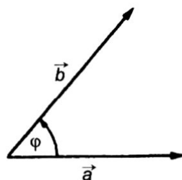
$$k \in \boldsymbol{R},\ \vec{v} = (x;\ y;\ z) \Rightarrow k \cdot \vec{v} = (kx;\ ky;\ kz).$$

Pavyzdys: $\vec{v} = (8;\ 1;\ -3),\ k = 5 \Rightarrow k \cdot \vec{v} = (40;\ 5;\ -15).$

Skaliarinė sandauga

Dviejų vektorių skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus vektorių modulių ir jų sudaromo kampo kosinuso sandaugai:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\varphi.$$



$|\vec{v}_2| \cdot \cos\varphi$ yra vektoriaus $\vec{v}_2$ projekcija vektoriuje $\vec{v}_1$.

Dviejų vektorių, išreikštų koordinatėmis, skaliarinė sandauga lygi jų vienavardžių koordinačių sandaugų sumai:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (x_1;\ y_1;\ z_1) \cdot (x_2;\ y_2;\ z_2) =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Pavyzdys: $\vec{v}_1 = (4;\ 0;\ 1),\ \vec{v}_2 = (3;\ 6;\ 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 13.$

Vektoriaus modulis (ilgis)

Jis randamas iš dviejų tų pačių vektorių skaliarinės sandaugos formulės:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Pavyzdys: $\vec{a} = (6; -4; -2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{56}.$

Vektorių lygumas

Du vektoriai, išreikšti koordinatėmis, yra lygūs, kai lygios jų vienavardės koordinatės:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2.$$

Pavyzdžiai. Vektoriai $\vec{v}_1 = (\sqrt{4};\ 0;\ 9)$ ir $\vec{v}_2 = (2;\ 0;\ 3^2)$ yra lygūs, nes $\sqrt{4} = 2,\ 0 = 0$ ir $9 = 3^2$.

Nurodyti vektoriai: $\vec{v}_1 = (a;\ 2a;\ b-1)$ ir $\vec{v}_2 = (b+1;\ 6;\ 1)$.
Konstantas a ir b reikia parinkti taip, kad būtų $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.
$a = b+1 \wedge 2a = 6 \wedge b-1 = 1 \Leftrightarrow a = 3 \wedge b = 2.$

Kolinearumas

Du vektoriai, išreikšti koordinatėmis, yra kolinearieji tada ir tik tada, kai jų atitinkamosios koordinatės yra proporcingos.

Žinomi vektoriai $\vec{v}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $\vec{v}_2 = (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Tada turi būti teisingos lygybės:

$$\vec{v}_2 = k \cdot \vec{v}_1 \Leftrightarrow x_2 = kx_1 \wedge y_2 = ky_1 \wedge z_2 = kz_1.$$

Pavyzdys: $\vec{v}_1 = (1;\ -3;\ 10)$ ir $\vec{v}_2 = (-2;\ 6;\ -20)$ yra kolinearieji, nes $k = -2$. Tada $-2 = (-2) \cdot 1 \wedge 6 = (-2) \cdot (-3) \wedge -20 = (-2) \cdot 10$.

Komplanarumas

Trys vektoriai $\vec{v}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ ir $\vec{v}_3 = (x_3;\ y_3;\ z_3)$ yra komplanarieji tada ir tik tada (kartu yra teisinga vektorinė lygybė $\vec{v}_3 = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2$), kai determinantas

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanto skaičiavimas paaiškintas p. 73.

Pavyzdžiai. Vektoriai $\vec{v}_1 = (5;\ 0;\ -12)$, $\vec{v}_2 = (-1;\ 3;\ 0)$ ir $\vec{v}_3 = (-4;\ -3;\ 12)$ yra komplanarieji, nes

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -12 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Įrodykime, kad vektoriai $\vec{v}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{v}_2 = (2;\ 4;\ 8)$ ir $\vec{v}_3 = (3;\ 9;\ 27)$ yra tiesiškai nepriklausomi, ir vektorių $\vec{v}_4 = (4;\ 16;\ 64)$ išreikškime pirmųjų trijų vektorių tiesiniu dariniu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

todėl $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ yra tiesiškai nepriklausomi.
Egzistuoja trys skaičiai a, b, $c \in \boldsymbol{R}$, su kuriais teisingas tiesinis darinys:

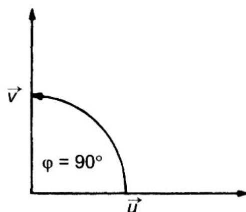
$$a \cdot (1;\ 1;\ 1) + b \cdot (2;\ 4;\ 8) + c \cdot (3;\ 9;\ 27) = (4;\ 16;\ 64).$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 4, \\ a + 4b + 9c = 16, \\ a + 8b + 27c = 64, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, \\ b = -6, \\ c = 4. \end{cases}$$

$$4 \cdot \vec{v}_1 - 6 \cdot \vec{v}_2 + 4 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_4.$$

Ortogonalieji vektoriai

Du vektoriai $\vec{u}$ ir $\vec{v}$ yra ortogonalieji, kai vektorių $\vec{u}$ aibės atstovas yra statmenas vektorių $\vec{v}$ aibės atstovui. Rašoma: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Kadangi du vienas kitam statmeni vektoriai sudaro 90° kampą ir $\cos 90° = 0$, tokių vektorių skaliarinė sandauga lygi 0.



$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Pavyzdys: $\vec{u} = (-1;\ 2;\ \sqrt{7})$, $\vec{v} = (4;\ 2;\ 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 + \sqrt{7} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Kampas tarp dviejų vektorių

Iš formulės $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$ išplaukia, kad

$$\cos\varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

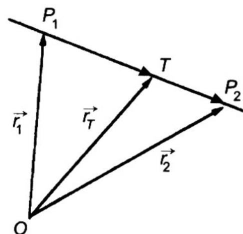
Pavyzdys: $\vec{u}=(-1;\ 3;\ 2),\ \vec{v}=(4;\ 2;\ -1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\varphi=\frac{(-1)\cdot 4+3\cdot 2+2\cdot(-1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}=0\Rightarrow\varphi=90°.$$

11.6. Geometriniai taikymai

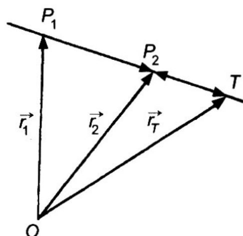
Atkarpos dalijimas nurodytuoju santykiu

Tiesės g taškas T dalija atkarpą P_1P_2 santykiu $k : 1$ ($k \neq -1$), kai $\overrightarrow{P_1T}=k\cdot\overrightarrow{TP_2}$.



Vidinis dalijimas

T yra tarp P_1 ir P_2. Vektoriai $\overrightarrow{P_1T}$ ir $\overrightarrow{TP_2}$ yra vienodai orientuoti, todėl $k > 0$. Kai T artėja prie taško P_2, teigiamasis skaičius k neaprėžtai didėja.



Išorinis dalijimas

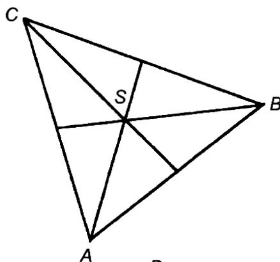
T yra atkarpos P_1P_2 išorėje. Vektoriai $\overrightarrow{P_1T}$ ir $\overrightarrow{TP_2}$ yra priešingų krypčių, todėl $k < 0$. Kai T artėja prie taško P_2, neigiamasis skaičius k neaprėžtai mažėja.

Kai T sutampa su P_1, tai $k = 0$, nes tada $\overrightarrow{P_1P_1}=k\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$. Kai taško P_1 spindulys vektorius yra $\vec{r}_1$, o taško P_2 – spindulys vektorius $\vec{r}_2$, tai taško T spindulys vektorius

$$\vec{r}_T=\frac{1}{1+k}(\vec{r}_1+k\vec{r}_2).$$

Jeigu T yra atkarpos vidurio taškas, tai $k = 1$.

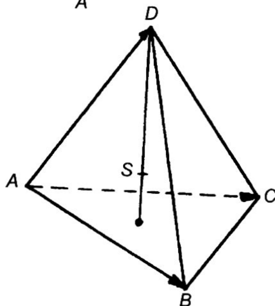
Trikampio svorio centras



Tarkime, kad trikampį *ABC* apibūdina spinduliai vektoriai $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$. Trikampio svorio centro spindulys vektorius

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

Piramidės svorio centras



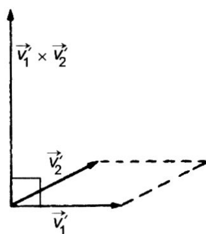
Tarkime, kad piramidę *ABCD* apibūdina spinduliai vektoriai $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ ir $\vec{r}_D$. Piramidės svorio centro spindulys vektorius

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D).$$

11.7. Vektorinė sandauga

Apibrėžimas

Dviejų nekolineariųjų vektorių $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ vektorinė sandauga yra vektorius $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, tenkinantis šias sąlygas:



$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ yra ortogonalus $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$;
$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ir $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ sudaro dešininę sistemą;

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin\left(\vec{v}_1 \,\hat{,}\, \vec{v}_2\right).$$

Kai vienas vektorių $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ yra nulinis vektorius arba šie vektoriai yra kolinearieji, vektorinė sandauga yra nulinis vektorius. Sandaugos $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ modulis lygus lygiagretainio, kurio dvi gretimos kraštinės su-

tampa su vektoriais $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$, plotui. Svarbiausios vektorinės sandaugos savybės:

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$	antikomutatyvumas;
$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3)$	skirstomumas;
$k \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (k \cdot \vec{v}_1) \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times (k \cdot \vec{v}_2)$	jungiamumas.

Vektorinės sandaugos išreiškimas koordinatėmis

Tarkime, kad žinomos vektorių koordinatės. Tada pirmiausia vektoriai išreiškiami vienetinių vektorių $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tiesiniais dariniais ir tie tiesiniai dariniai sudauginami atsižvelgiant į vektorinės sandaugos savybes:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \times \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right).$$

Sudauginus gaunamas reiškinys, kuris yra išskleistas determinantas:

$$\vec{v}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1),\ \vec{v}_2 = (x_2;\ y_2;\ z_2) \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Atkreipiame dėmesį į tai, kad toks vektorinės sandaugos išreiškimas determinantu yra tik formalus užrašas, nes apskritai determinantas yra realusis skaičius, o ne vektorius.

Pavyzdžiai: $\vec{v}_1 = (-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{v}_2 = (3;\ 1;\ 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

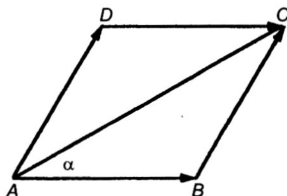
$$= -2 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k} = (-2;\ 7;\ -1);$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1;\ 0;\ 0) \times (0;\ 1;\ 0) = \vec{k};$$

$$\vec{O} \times \vec{v} = \vec{O}.$$

Trikampio plotas

Centrine simetrija iš trikampio ABC gaunamas lygiagretainis $ABCD$. Lygiagretainio plotas išreiškiamas vektorinės sandaugos moduliu, o trikampio plotas yra lygiagretainio ploto pusė.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \sin\alpha.$$

Pavyzdys. Trikampio viršūnės apibrėžiamos jų spinduliais vektoriais:

$A : \vec{r}_A = (2;\ -3;\ 0),$
$B : \vec{r}_B = (1;\ 1;\ 5),$
$C : \vec{r}_C = (3;\ -2;\ 1).$

Pirmiausia randami vektoriai, sutampantys su trikampio kraštinėmis:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1;\ 1;\ 5) - (2;\ -3;\ 0) = (-1;\ 4;\ 5),$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (3;\ -2;\ 1) - (2;\ -3;\ 0) = (1;\ 1;\ 1);$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 6 \cdot \vec{j} - 5 \cdot \vec{k} = (-1;\ 6;\ -5),$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + (-5)^2} = \sqrt{62}.$$

Trikampio ABC plotas

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{62} \approx 3,9.$$

11.8. Mišrioji sandauga

Apibrėžimas

Trijų vektorių $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ir $\vec{v}_3$ sandauga $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$ vadinama mišriąja sandauga. Mišrioji sandauga yra realusis skaičius. Svarbiausios mišriosios sandaugos savybės:

$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ operacijos sukeičiamos vietomis;

$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$ vektorius galima cikliškai sukeisti.

Kai vektoriai išreikšti koordinatėmis, mišrioji sandauga lygi determinantui:

$$\vec{v}_1 = (x_1;\, y_1;\, z_1),\ \vec{v}_2 = (x_2;\, y_2;\, z_2),\ \vec{v}_3 = (x_3;\, y_3;\, z_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

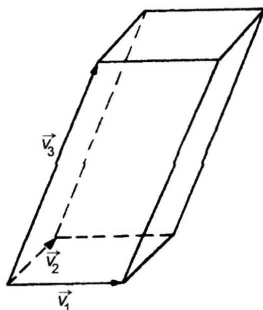
Pavyzdys: $\vec{v}_1 = (-1;\ 0;\ 2),\ \vec{v}_2 = (1;\ 4;\ 1),\ \vec{v}_3 = (0;\ 1;\ 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\vec{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ (Sarijaus taisyklė).}$$

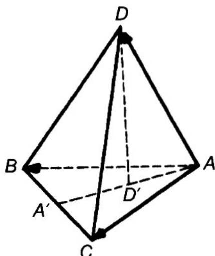
Gretasienio tūris

Tarkime, kad $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ir $\vec{v}_3$ yra trys nekomplanarieji vektoriai, sudarantys dešininį trejetą. Nubraižykime gretasienį, kurio trys briaunos sutaptų su šiais vektoriais. Gretasienio tūris apskaičiuojamas pagal formulę

$$V = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\vec{v}_3.$$



Piramidės tūris



Piramidė $ABCD$ sudaro gretasienio šeštąją dalį. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AD}$ sudaro dešininį trejetą, tai gretasienio tūris lygus $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}$, o piramidės tūris

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}.$$

Pavyzdys. $\vec{r}_A=(2;\ 1;\ 1)$, $\vec{r}_B=(-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{r}_C=(2;\ 4;\ -1)$, $\vec{r}_D=(0;\ 1;\ 2)$.

Šie spinduliai vektoriai apibrėžia piramidę $ABCD$. Apskaičiuokime jos tūrį.

$$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(-3;\ 2;\ 1),$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec{r}_C-\vec{r}_A=(0;\ 3;\ -2),$$
$$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_D-\vec{r}_A=(-2;\ 0;\ 1);$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{5}{6}.$$

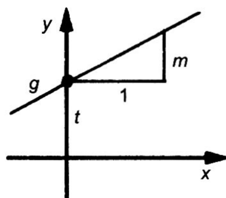
12. Analizinė geometrija

12.1. Plokštumos tiesės lygtys

Kryptinė tiesės lygtis

Ji apibūdinama krypties koeficientu $m(m = \text{tg}\,\alpha)$ ir ašyje Oy iškertama atkarpa t. Žr. taip pat apie tiesines funkcijas 4.5 skyrelyje p. 117.

$$g : y = mx + t.$$



Per koordinačių pradžią einančios tiesės lygtis $g : y = mx$.

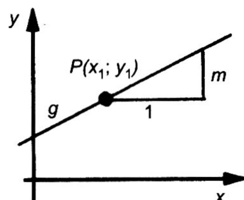
Ašies Ox lygtis: $g : y = 0$.

Ašies Oy lygtis: $g : x = 0$.

Lygtis tiesės, kai žinomas jos taškas ir jos krypties koeficientas

Kai tiesė eina per tašką $P_1(x_1; y_1)$ ir jos krypties koeficientas m, tiesės lygtis yra tokia:

$$g : y - y_1 = m(x - x_1).$$



Tiesės, einančios per du taškus, lygtis

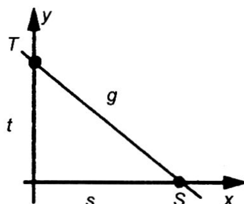
Kai tiesė eina per taškus $P_1(x_1; y_1)$ ir $P_2(x_2; y_2)$, jos lygtis tokia:

$$g : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ašinė tiesės lygtis

Ji apibūdinama tiesės susikirtimo su koordinačių ašimis taškais $S(s; 0)$ ir $T(0; t)$:

$$g : \frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1.$$



Pavyzdys. Tiesė eina per du taškus $P_1(-4; -2)$ ir $P_2(3; 5)$.

Jos lygtis yra tokia: $g: \dfrac{y-(-2)}{x-(-4)} = \dfrac{5-(-2)}{3-(-4)} \Leftrightarrow \dfrac{y+2}{x+4} = \dfrac{7}{7}.$

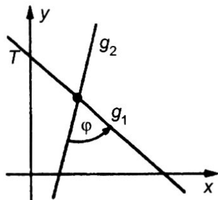
Krypties koeficientas: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \dfrac{5-(-2)}{3-(-4)} = 1.$

Tiesės lygtį galima užrašyti taip:

$g: y-(-2) = 1 \cdot (x-(-4)) \Leftrightarrow y+2 = x+4.$

Dviejų tiesių padėtis

Kampas tarp susikertančiųjų tiesių. Tai smailusis kampas φ, kuris gaunamas susikirtus dviem tiesėms.



$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

Dvi tiesės yra lygiagrečios viena su kita, kai jų krypčių koeficientai lygūs: $m_1 = m_2$. Dvi tiesės yra statmenos viena kitai, kai $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Pavyzdys. Žinomos dviejų tiesių lygtys:

$g_1: y = 3x - 4$ ir $g_2: y = -2x + 3$.

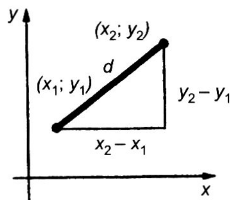
Tiesių krypčių koeficientai yra tokie: $m_1 = 3$, $m_2 = -2$.

Kampas tarp tiesių: $\operatorname{tg} \varphi = \left| \dfrac{-2-3}{1+3 \cdot (-2)} \right| = \left| \dfrac{-5}{-5} \right| = 1,$

$\varphi = \operatorname{arctg} 1 = 45°$.

Atstumas tarp dviejų taškų plokštumoje

Jis apskaičiuojamas pagal Pitagoro teoremą, taikomą pavaizduotam trikampiui:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Pavyzdys: $A(4;5),\ B(8;2) \Rightarrow d = \sqrt{(8-4)^2 + (2-5)^2} = 5.$

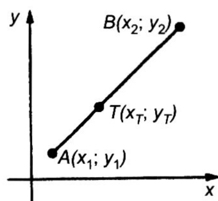
Atkarpos dalijimo taškas

Taškas T dalija atkarpą AB santykiu $AT : TB = k$.

Tada jo koordinatės apskaičiuojamos pagal formules:

$$x_T = \frac{x_1 + kx_2}{1+k};$$

$$y_T = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}.$$



12.2. Erdvės tiesės lygtys

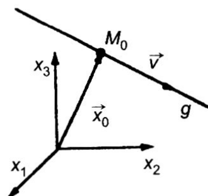
Išvedant erdvės tiesių ir plokštumų lygtis patogu naudotis vektoriais. Juos taikant supaprastėja užrašai. Dabar įprasta vietoj koordinačių žymėjimų x, y ir z naudoti simbolius x_1, x_2 ir x_3.

Vektorinė kryptinės tiesės lygties forma

Tiesę vienareikšmiškai apibrėžia jos taškas M_0, kurio spindulys vektorius $\vec{x}_0$, ir tiesės krypties vektorius $\vec{v}$.

Kai kintamojo tiesės taško spindulys vektorius yra $\vec{x}$, o λ yra realusis skaičius, tada teisingas sąryšis:

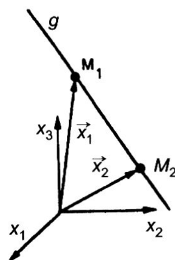
$$g : \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{v}.$$



Pavyzdys. Taško M_0 spindulys vektorius $\vec{x}_0 = (4; 3; 1)$ ir tiesės krypties vektorius $\vec{v} = (1; -1; 0)$. Tada tiesės lygtis yra tokia: $g: \vec{x} = (4;\ 3;\ 1) + \lambda \cdot (1;\ -1;\ 0)$.

Vektorinė tiesės, einančios per du taškus, lygties forma

Tiesę erdvėje vienareikšmiškai apibrėžia du taškai M_1 ir M_2. Kai tų taškų spinduliai vektoriai yra $\vec{x}_1$ ir $\vec{x}_2$, gaunama tokia tiesės lygtis:



$$g: \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1).$$

$\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ yra krypties vektorius.

Tiesei galima priskirti daug tokios formos lygčių, parenkant kitus jos du taškus, tačiau visos tos lygtys pertvarkytos sutaps.

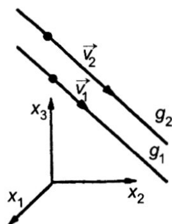
Pavyzdys. Nurodyti du taškai: $M_1(-5; 2; 0)$, $M_2(1; 0; 4)$.
Jų spinduliai vektoriai: $\vec{x}_1 = (-5; 2; 0)$, $\vec{x}_2 = (1; 0; 4)$.
Taigi galima parašyti tiesės lygtį:

$$g: \vec{x} = (-5;\ 2;\ 0) + \lambda((1;\ 0;\ 4) - (-5;\ 2;\ 0)),$$
$$g: \vec{x} = (-5;\ 2;\ 0) + \lambda \cdot (6;\ -2;\ 4).$$

Lygiagrečiosios tiesės

Dvi erdvės tiesės yra lygiagrečiosios tada ir tik tada, kai jų krypčių vektoriai yra kolinearieji.

$$g_1 \| g_2 \Leftrightarrow \vec{v}_2 = k \cdot \vec{v}_1.$$



Pavyzdys. Žinomos dviejų tiesių lygtys:

$g_1 : \vec{x} = (3;\ 1;\ 0) + \lambda(3;\ 0;\ -3)$,

$g_2 : \vec{x} = (-4;\ 3;\ 8) + \mu(-9;\ 0;\ 9)$.

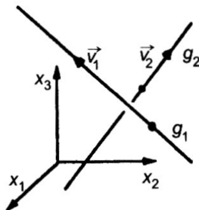
Tiesės lygiagrečiosios, nes abu krypties vektoriai yra kolinearieji:

$(-9;\ 0;\ 9) = (-3) \times (3;\ 0;\ -3)$.

Statmenosios tiesės

Dvi erdvės tiesės yra statmenosios tada ir tik tada, kai jų krypčių vektoriai yra ortogonalieji, taigi jų sudaromas kampas yra statusis.

$g_1 : \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{v}_1,\ g_2 : \vec{x} = \vec{x}_2 + \mu\vec{v}_2.$



$$g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

Krypties vektorių skaliarinė sandauga lygi 0, nes juos sieja sąryšis: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos 90° = 0$.

Statmenos plokštumoje tiesės visada susikerta, tačiau statmenos erdvėje tiesės gali susikirsti, bet gali ir prasilenkti.

Pavyzdys. $g_1 : \vec{x} = \left(5;\ \sqrt{3}\right) + \lambda(3;\ -1),\ g_2 : \vec{x} = (0;\ 7) + \mu(1;\ 3)$.

Kadangi $(3; -1) \cdot (1; 3) = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$, tai tiesės yra statmenos viena kitai. Jos susikerta, nes yra plokštumos tiesės.

Dviejų tiesių susikirtimas

Norėdami išsiaiškinti, ar dvi nelygiagrečios erdvės tiesės kertasi, sulyginame jų lygčių dešiniąsias puses.

Pavyzdžiai. $g_1 : \vec{x} = (2; 1; 5) + \lambda(1; 3; -9),$

$g_2 : \vec{x} = (-1; 6; -4) + \mu(2; -1; 0);$

$$(2; 1; 5) + \lambda(1; 3; -9) = (-1; 6; -4) + \mu(2; -1; 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \lambda = -1 + 2\mu, \\ 1 + 3\lambda = 6 - \mu, \\ 5 - 9\lambda = -4. \end{cases}$$

Iš dviejų lygčių (šiame pavyzdyje iš abiejų paskutiniųjų) apskaičiuojame λ ir μ:

$$\begin{cases} 1 + 3\lambda = 6 - \mu, \\ 5 - 9\lambda = -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3\lambda = 6 - \mu, \\ 9\lambda = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2, \\ \lambda = 1. \end{cases}$$

Šias reikšmes įrašome į likusią lygtį (šiame pavyzdyje į pirmąją) ir gauname teisingą teiginį 2 + 1 = –1 + 4. Kadangi lygčių sistema turi vienintelį sprendinį, tai egzistuoja tiesių susikirtimo taškas. Jo koordinatės gaunamos įrašant λ reikšmę į g_1 arba μ reikšmę į g_2.

$$S : \vec{x}_S = (2;\ 1;\ 5) + 1 \cdot (1;\ 3;\ -9) \Leftrightarrow S : \vec{x}_S = (3;\ 4;\ -4),$$

$g_1 : \vec{x} = (1;\ 0;\ 0) + \lambda \cdot (0;\ 1;\ 2),$

$g_2 : \vec{x} = (2;\ 1;\ 3) + \mu \cdot (1;\ 1;\ 1);$

$$(1;\ 0;\ 0) + \lambda \cdot (0;\ 1;\ 2) = (2;\ 1;\ 3) + \mu \cdot (1;\ 1;\ 1) \Leftrightarrow$$

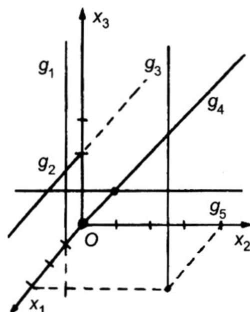
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 + \mu, \\ \lambda = 1 + \mu, \\ 2\lambda = 3 + \mu. \end{cases}$$

$\mu = -1 \wedge \lambda = 0 \wedge 0 = 2$ yra klaidingas teiginys, todėl tiesės yra prasilenkiančiosios.

Vektorinės ir koordinatinės lygtys

Erdvės tiesę galima apibrėžti vektorine lygtimi arba dviem koordinatinėmis lygtimis.

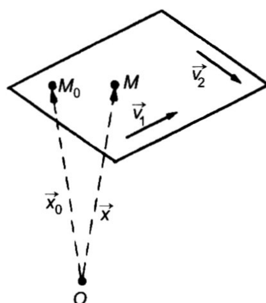
Pavyzdys. Pateiktos penkių brėžinyje pavaizduotų tiesių vektorinės ir koordinatinės lygtys.



$$g_1 : \vec{x} = (1;\ 0;\ 0) + \lambda(0;\ 0;\ 1) \Leftrightarrow g_1 : x_1 = 1 \wedge x_2 = 0;$$
$$g_2 : \vec{x} = (0;\ 0;\ 2) + \lambda(1;\ 0;\ 0) \Leftrightarrow g_2 : x_1 = 1 \wedge x_3 = 2;$$
$$g_3 : \vec{x} = (3;\ 4;\ 0) + \lambda(0;\ 0;\ 1) \Leftrightarrow g_3 : x_1 = 3 \wedge x_2 = 4;$$
$$g_4 : \vec{x} = (0;\ 0;\ 0) + \lambda(0;\ 1;\ 1) \Leftrightarrow g_4 : x_1 = 0 \wedge x_2 = x_3;$$
$$g_5 : \vec{x} = (0;\ 0;\ 1) + \lambda(0;\ 1;\ 0) \Leftrightarrow g_5 : x_1 = 0 \wedge x_3 = 1.$$

12.3. Plokštumos lygtys

Plokštumos lygtis nusakoma tašku ir dviem krypčių vektoriais. Plokštumą E vienareikšmiškai apibrėžia taškas M_0, kurio spindulys vektorius yra $\vec{x}_0$, ir du nekolinearieji krypties vektoriai $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$:

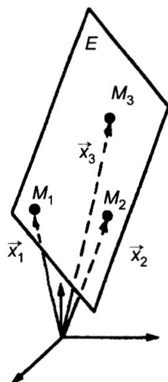


$$E : \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2.$$

Kai nepriklausomi parametrai λ ir μ įgyja visas galimas realiąsias reikšmes, tai taškas M, kurio spindulys vektorius yra $\vec{x}$, nubrėžia plokštumą E.

Plokštumos lygtį nusako trys taškai

Plokštumą E vienareikšmiškai apibrėžia trys jos taškai M_1, M_2, M_3, nesantys vienoje tiesėje. Kai šių taškų spinduliai vektoriai yra $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, plokštumos lygtis užrašoma taip:



$$E : \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \mu(\vec{x}_3 - \vec{x}_1).$$

Pavyzdys. Žinomi trys plokštumos taškai: $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(3;\ -2;\ 1)$ ir $M_3(-4;\ 1;\ 0)$.

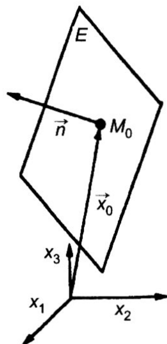
$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = (3;\ -2;\ 1) - (1;\ 2;\ 3) = (2;\ -4;\ -2)$,

$\vec{x}_3 - \vec{x}_1 = (-5;\ -1;\ -3)$;

$E : \vec{x} = (1;\ 2;\ 3) + \lambda(2;\ -4;\ -2) + \mu(-5;\ -1;\ -3)$.

Bendroji lygtis

Plokštumą E vienareikšmiškai apibrėžia taškas M_0, kurio spindulys vektorius $\vec{x}_0$, ir normalusis vektorius $\vec{n}$:



$$E : (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Pavyzdys. Žinomas plokštumos taškas $M_0 = (3;\ 7;\ -1)$ ir jos normalusis vektorius $\vec{n} = (2;\ 2;\ 2)$.

Bendroji plokštumos lygtis tokia:

$E : (\vec{x} - (3; 7; -1)) \cdot (2; 2; 2) = 0.$

Koordinatinė plokštumos lygties forma

A, B, C, D – realieji skaičiai:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \text{ arba } Ax + By + Cz + D = 0.$$

Pavyzdys. Bendrąją plokštumos lygtį $E : (\vec{x} - (3;\ 7;\ -1)) \times$ $\times (2;\ 2;\ 2) = 0$ (žr. ankstesnį skirsnį) lengva pertvarkyti į koordinatinę formą. Reikia spindulį vektorių $\vec{x}$ irgi užrašyti koordinatėmis:

$$E : ((x_1;\ x_2;\ x_3) - (3; 7; -1)) \cdot (2; 2; 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E : (x_1 - 3; x_2 - 7; x_3 + 1) \cdot (2; 2; 2) = 0,$$
$$E : (x_1 - 3) \cdot 2 + (x_2 - 7) \cdot 2 + (x_3 + 1) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E : 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 18 = 0.$$

Normalusis vienetinis vektorius

Šis vektorius gaunamas padalijant normaliojo vektoriaus komponentes iš jo modulio.

Normalusis vienetinis vektorius: $\vec{n}^\circ = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$

Panašiai randamas ir bet kurio kito vektoriaus vienetinis vektorius.

Pavyzdys. $\vec{n} = (3;\ -4;\ 5) \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

Normalusis vienetinis vektorius $\vec{n}^\circ = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \cdot (3; -4; 5).$

Normalioji lygtis

Plokštumą vienareikšmiškai apibrėžia jos atstumas d iki koordinačių pradžios ir normalusis vienetinis vektorius, nukreiptas nuo koordinačių pradžios į plokštumą.

Normalioji lygtis: $E: \vec{x} \cdot \vec{n}^{\circ} = d.$

Normaliąją lygtį galima gauti iš bendrosios, padalijant abi jos puses iš $|\vec{n}|$.

12.4. Padėties sąryšiai

Taško atstumas iki plokštumos

Taško P, kurio spindulys vektorius yra $\vec{r}_P$, atstumas iki plokštumos E pažymėtas e. Tada teisinga formulė:

taško atstumas iki plokštumos $e = |\vec{r}_P \cdot \vec{n}^{\circ} - d|.$

Ši formulė nepriklauso nuo koordinačių pradžios taško padėties plokštumos atžvilgiu.

Pavyzdys. Nurodyta plokštuma $E: -x_1 + 4x_2 + \sqrt{8}x_3 = 10$ ir jai nepriklausantis taškas $P(5; -2; 0)$. Iš plokštumos lygties randamas normalusis vektorius $\vec{n} = \left(-1;\ 4;\ \sqrt{8}\right)$ ir apskaičiuojamas jo modulis $|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 8} = 5$.

Normalioji lygtis: $E: -\frac{1}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{\sqrt{8}}{5}x_3 = 2.$

Plokštumos atstumas iki koordinačių pradžios taško lygus 2, taško P atstumas iki plokštumos E yra

$$e = \left|\frac{1}{5}(5; -2; 0) \cdot \left(-1;\ 4;\ \sqrt{8}\right) - 2\right| = |-4,6| = 4,6.$$

Tiesė lygiagreti su plokštuma

Tiesė $g: \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v}_1$ yra lygiagreti su plokštuma E, nusakoma vektorine lygtimi $\vec{x} = \vec{r}_0 + \mu \cdot \vec{v}_2 + \nu \cdot \vec{v}_3$, tada ir tik tada, kai $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ir $\vec{v}_3$ yra komplanarieji.

Kai plokštuma nusakoma bendrąja lygtimi $E: (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$, tai g yra lygiagreti su šia plokštuma, jeigu tiesės krypties vektorius yra ortogonalus plokštumos normaliajam vektoriui.

Pavyzdys: $g: \vec{x} = (1; 3; -5) + \lambda \cdot (2; 0; 1)$,

$E: x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0,$

$\vec{v}_1 = (2; 0; 1)$, $\vec{n} = (1; 5; 2)$,

$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) = 0,$

taigi g yra lygiagreti su E.

Tiesė yra plokštumoje

Tiesė $g: \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v}_1$ yra plokštumoje (pavyzdžiui, apibrėžtoje bendrąja lygtimi) $E: (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$ tada ir tik tada, kai g yra lygiagreti su E ir bent vienas tiesės g taškas (pavyzdžiui, $\vec{x}_0$) yra plokštumoje.

Tiesė kerta plokštumą

Kai tiesė nėra lygiagreti su plokštuma, ji kerta plokštumą viename taške. Norint surasti šį tašką, tiesės lygties komponentės įrašomos į bendrąją plokštumos lygtį.

Pavyzdys. $g: \vec{x} = (2; -2; 0) + \lambda \cdot (1; 0; 1)$, $E: x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$,

$$g: \begin{cases} x_1 = 2 + \lambda, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = \lambda \end{cases} \text{ ir } E: x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda - 2 \cdot (-2) + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Įrašius į tiesės lygtį $\lambda = -1$, apskaičiuojamos susikirtimo taško koordinatės.

Statmuo, nuleistas į plokštumą

Tiesė $g: \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v}_1$ yra statmena plokštumai (pavyzdžiui, apibrėžtai bendrąja lygtimi) $E: (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$ tada ir tik tada, kai krypties vektorius $\vec{v}_1$ ir plokštumos E normalusis vektorius $\vec{n}$ yra kolinearieji.

Lygiagrečiosios ir statmenosios plokštumos

Dvi plokštumos yra lygiagrečiosios tada ir tik tada, kai jų normalieji vektoriai yra kolinearūs.

Dvi plokštumos yra statmenos viena kitai tada ir tik tada, kai jų normalieji vektoriai yra ortogonalūs, taigi kai jų skaliarinė sandauga lygi 0.

Dviejų plokštumų susikirtimo tiesė

Patogiausia surasti plokštumų susikirtimo tiesę tada, kai vienos plokštumos lygtis yra parametrinė, o kitos – bendroji. Tada, suradus kintamuosius iš vienos lygties, patogu juos įrašyti į kitą.

Pavyzdys. $E: \vec{x} = (1;\, 0;\, 8) + \lambda \cdot (1;\, -1;\, 0) + \mu \cdot (0;\, -1;\, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} E_1: (x_1;\, x_2;\, x_3) = (1;\, 0;\, 8) + \lambda \cdot (1;\, -1;\, 0) + \mu \cdot (0;\, -1;\, 0), \\ E_2: x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{array}$$

$$E_1: \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda, \\ x_2 = -\lambda - \mu, \\ x_3 = 8. \end{cases}$$

Įrašę į $E_2: x_1 - x_2 + x_3 = 10$, gauname

$1 + \lambda + \lambda + \mu + 8 = 10 \Leftrightarrow \mu = 1 - 2\lambda$.

Ši parametro μ reikšmė įrašoma į vektorinę plokštumos lygtį:

$\vec{x} = (1;\, 0;\, 8) + \lambda \cdot (1;\, -1;\, 0) + (1 - 2\lambda)(0;\, -1;\, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{x} = (1;\, -1;\, 8) + \lambda(1;\, 1;\, 0)$ (susikirtimo tiesės lygtis).

Kampas tarp dviejų plokštumų

Normalieji vektoriai $\vec{n}_1$ ir $\vec{n}_2$ sudaro dvi poras kryžminių kampų. Kampu tarp plokštumų laikomas mažesnis iš šių kryžminių kampų. Jo kosinuso reikšmė yra teigiama.

Kampas tarp dviejų plokštumų: $\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right|.$

Pavyzdys: $E_1 : -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4,\ E_2 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 2;$

$$\vec{n}_1 = (-1;\ 3;\ 2),\ |\vec{n}_1| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14},$$
$$\vec{n}_2 = (2;\ -1;\ -1),\ |\vec{n}_2| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6},$$
$$\cos\alpha = \left|\frac{(-1)\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 2\cdot(-1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\right| = \frac{7}{\sqrt{84}} = 0{,}767,$$
$$\alpha = 40{,}2^\circ.$$

Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Kai tiesės krypties vektorius yra $\vec{v}$ ir plokštumos normalusis vektorius yra $\vec{n}$, kampą tarp tiesės ir plokštumos apibūdina formulė:

kampas tarp tiesės ir plokštumos $\sin\alpha = \left|\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right|.$

Pavyzdys: $g : \vec{x} = (1;\ 1;\ 1) + \lambda\cdot(1;\ 3;\ 5),\ E : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6;$

$$\vec{v} = (1;\ 3;\ 5) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35},$$
$$\vec{n} = (2;\ 3;\ -1) \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14},$$
$$\sin\alpha = \left|\frac{1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 5\cdot(-1)}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{14}}\right| = \frac{6}{\sqrt{490}} = 0{,}271,$$
$$\alpha = 15{,}7^\circ.$$

Atstumas tarp dviejų lygiagrečiųjų plokštumų

Kai koordinačių pradžios taškas nėra tarp plokštumų, tai abiejų plokštumų normaliąsias lygtis galima parašyti naudojantis tuo pačiu normaliuoju vienetiniu vektoriumi: $E_1 : \vec{x} \cdot \vec{n}^\circ = d_1$, $E_2 : \vec{x} \cdot \vec{n}^\circ = d_2$.

Tada atstumas tarp plokštumų $e = |d_1 - d_2|$.

Pavyzdys: $E_1 : x_1 + x_2 - x_3 = 3 \Rightarrow E_1 : \dfrac{x_1 + x_2 - x_3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$,

$$E_2 : 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \Rightarrow E_2 : \frac{x_1 + x_2 - x_3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$e = \left|\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right| = \sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{3} \approx 1,4.$$

Kai koordinačių pradžios taškas yra tarp plokštumų, tai jų normalieji vienetiniai vektoriai yra priešingų krypčių. Todėl abiejų plokštumų normaliosios lygtys užrašomos taip: $E_1 : \vec{x} \cdot \vec{n}^\circ = d_1$, $E_2 : \vec{x} \cdot (-\vec{n}^\circ) = d_2$. Šiuo atveju atstumas tarp plokštumų $e = d_1 + d_2$.

Pavyzdys: $E_1 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \Rightarrow E_1 : \dfrac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{3} = 2$,

$$E_2 : x_1 + 0,5x_2 - x_3 = -9 \Rightarrow E_2 : -\frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{3.} = 6,$$

$$e = 2 + 6 = 8.$$

Tiesės ir plokštumos pėdsakai

Tiesės ir koordinačių plokštumos susikirtimo taškas vadinamas tiesės pėdsaku plokštumoje.

Plokštumos ir koordinačių ašies susikirtimo taškas vadinamas plokštumos pėdsaku ašyje.

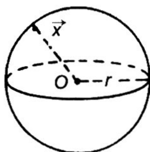
Plokštumos ir koordinačių plokštumos susikirtimo tiesė vadinama plokštumos pėdsaku koordinačių plokštumoje.

12.5. Sfera

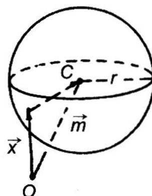
Sfera yra aibė visų erdvės taškų, kurie nuo pastoviojo taško (centro) yra nutolę vienodu atstumu r. Kai centras yra koordinačių pradžios taškas, sferos lygties vektorinė ir kanoninė išraiška yra tokia:

sferos lygtis	$\vec{x}^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0.$

Kai sferos centras yra taškas $C(m_1;\ m_2;\ m_3)$, tai iš sąlygos, kad $|\vec{x} - \vec{m}|$ yra lygus spinduliui, išplaukia tokios sferos lygtys: vektorinė lygtis $(\vec{x} - \vec{m})^2 - r^2 = 0$ ir kanoninė lygtis $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 - r^2 = 0$.



Centras yra koordinačių pradžios taškas



Centras yra taškas C

Pavyzdys. Sferos centras yra taškas $C(4;\ 2;\ 1)$, spindulys $r = 5$.

Vektorinė lygtis: $((x_1;\ x_2;\ x_3) - (4;\ 2;\ 1))^2 - 25 = 0$.

Kanoninė lygtis: $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2 - 25 = 0$.

Kai sfera apibrėžiama lygtimi $(\vec{x} - \vec{m})^2 - r^2 = 0$ ir $\vec{x}_T$ yra sferos taško spindulys vektorius, tai per šį tašką nubrėžta liečiamoji sferos plokštuma nusakoma lygtimi $(\vec{x}_T - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{m}) = r^2$.

13. Kūgio pjūviai plokštumoje

13.1. Apskritimas

Apskritimo centras yra koordinačių pradžios taškas

Kanoninė lygtis:

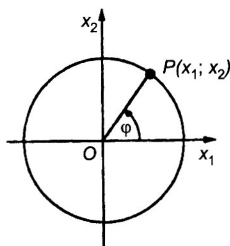
$x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0.$

Vektorinė lygtis:

$\vec{x}^2 - r^2 = 0.$

Parametrinės lygtys:

$x_1 = r\cos\varphi \wedge x_2 = r\sin\varphi.$



Per tašką $P(p_1; p_2)$ nubrėžtos liestinės ir poliarės lygtys sutampa.

Koordinatinė lygtis: $p_1x_1 + p_2x_2 - r^2 = 0.$

Vektorinė lygtis: $\vec{p} \cdot \vec{x} - r^2 = 0.$

Apskritimo centras nėra koordinačių pradžios taškas

Centras yra taškas $C(m_1; m_2)$.

Kanoninė lygtis: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 - r^2 = 0.$

Vektorinė lygtis: $(\vec{x} - \vec{m})^2 - r^2 = 0.$

Parametrinės lygtys: $x_1 = m_1 + r\cos t \wedge x_2 = m_2 + r \cdot \sin t.$

Per tašką $P(p_1; p_2)$ nubrėžtos apskritimo, kurio centras $C(m_1; m_2)$, liestinės lygtis yra tokia:

koordinatinė lygtis:

$$(p_1-m_1)(x_1-m_1)+(p_2-m_2)(x_2-m_2)-r^2=0;$$

vektorinė lygtis:

$$(\vec{p}-\vec{m})(\vec{x}-\vec{m})-r^2=0.$$

Pavyzdys. Apskritimo centras yra taškas $C(3;\ 1)$, spindulys $r = 2$, lietimosi taškas $P(3;\ 3)$.

Apskritimo lygtis: $(x_1-3)^2+(x_2-1)^2-4=0.$

Liestinės lygtis:

$$(3-3)(x_1-3)+(3-1)(x_2-1)-4=0,$$

$$(3-1)(x_2-1)-4=0 \Leftrightarrow 2x_2-2-4=0 \Leftrightarrow x_2=3.$$

Tai lygtis tiesės, lygiagrečios su ašimi Ox.

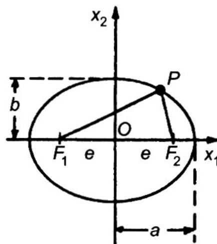
13.2. Elipsė

Elipse vadinama kreivė, kurios kiekvieno taško atstumų nuo dviejų pastoviųjų plokštumos taškų (židinių) suma yra pastovi ir lygi didžiajai elipsės ašiai. Elipsės centras yra koordinačių sistemos pradžios taškas.

a – didžioji pusašė, b – mažoji pusašė, O – centras, F_1, F_2 – židiniai, e – tiesinis ekscentricitetas, ε – skaitinis ekscentricitetas.

$$a>b: e^2=a^2-b^2,\ \varepsilon=\frac{e}{a};$$

$$a<b: e^2=b^2-a^2,\ \varepsilon=\frac{e}{b}.$$



Kanoninė elipsės lygtis:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1=0.$$

Kai elipsės centras yra taškas $C(m_1; m_2)$ ir elipsės ašys lygiagrečios su koordinačių ašimis, elipsės lygtis yra tokia:

$$\frac{(x_1-m_1)^2}{a^2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{b^2}-1=0.$$

Elipsę galima laikyti afiniuoju apskritimo vaizdu.

Pasitelkus transformacijas, galima iš apskritimo lygties gauti elipsės lygtį.

Pavyzdys. Reikia rasti elipsės lygtį, kai jos centras yra koordinačių pradžios taškas, didžioji pusašė $a = 17$ ir tiesinis ekscentricitetas $e = 15$.

$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - e^2}$,

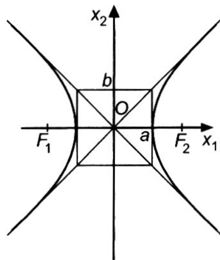
$b = \sqrt{289-225} = \sqrt{64} = 8.$

Kanoninė elipsės lygtis: $\frac{x_1^2}{289}+\frac{x_2^2}{64}=1.$

13.3. Hiperbolė

Hiperbole vadinama kreivė, kurios kiekvieno taško atstumų nuo dviejų pastovių plokštumos taškų (židinių) skirtumas yra pastovus ir lygus realiajai hiperbolės ašiai. Hiperbolės centras yra koordinačių sistemos pradžios taškas.

a – realioji pusašė, b – menamoji pusašė, O – centras, F_1, F_2 – židiniai, e – tiesinis ekscentricitetas, ε – skaitinis ekscentricitetas.



a yra ašyje $Ox_1 : e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

a yra ašyje $Ox_2 : e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{b}$.

Kanoninė hiperbolės lygtis:

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-1=0.$$

Hiperbolė turi dvi asimptotes, kurių lygtys $x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1$.

Kai hiperbolės centras yra taškas $C(m_1;\ m_2)$ ir hiperbolės ašys yra lygiagrečios su koordinačių ašimis, kanoninė hiperbolės lygtis tokia:

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{a^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Pavyzdys. Reikia parašyti kanoninę hiperbolės lygtį, kai jos centras yra taškas $C(-3;\ 4)$, $a = 6$ ir $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Atkarpos a ir b yra koordinačių ašyse.

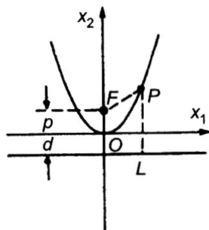
$$\varepsilon = \frac{e}{a} \Rightarrow e = a \cdot \varepsilon \Rightarrow e = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5},$$

$$b^2 = e^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 45 - 36 = 9.$$

Hiperbolės lygtis: $\frac{(x_1 + 3)^2}{36} - \frac{(x_2 - 4)^2}{9} = 1.$

13.4. Parabolė

Parabole vadinama kreivė, kurios kiekvienas taškas yra vienodai nutolęs nuo pastoviojo plokštumos taško (židinio) ir pastoviosios tiesės (direktrisės).



F – židinys, O – viršūnės taškas, L – statmens, nuleisto iš parabolės taško į direktrisę, pagrindas, p – parametras, $|p| = 2OF$, d – direktrisės atstumas nuo viršūnės, $d = \frac{1}{2} \cdot |p|$.

Kai parabolės viršūnė yra koordinačių pradžios taškas, kanoninė parabolės lygtis tokia.

Šakos, nukreiptos į dešinę: $x_2^2 - 2px_1 = 0$, šakos, nukreiptos į kairę: $x_2^2 + 2px_1 = 0$, šakos, nukreiptos aukštyn: $x_1^2 - 2px_2 = 0$, šakos, nukreiptos žemyn: $x_1^2 + 2px_2 = 0$.

Kai viršūnė $S(s_1;\ s_2)$ nesutampa su koordinačių pradžios tašku, parabolės, kurios šakos nukreiptos į dešinę, lygtis yra tokia:

$$(x_2 - s_2)^2 = 2p(x_1 - s_1).$$

Liestinės, nubrėžtos per tašką $P(p_1;\ p_2)$, kai parabolės viršūnė yra taškas $S(s_1;\ s_2)$ ir jos šakos nukreiptos į dešinę, lygtis yra ši:

$$(x_2 - s_2)(p_2 - s_2) = p(x_1 + p_1 - 2s_1).$$

Pavyzdys. Parašykime kanoninę parabolės ir jos direktrisės lygtį, kai viršūnė yra koordinačių pradžios taškas ir židinys – taškas $F\left(\frac{5}{4};\ 0\right)$.

$$\frac{5}{4} = \frac{p}{2} \Rightarrow p = \frac{5}{2}.$$

Kanoninė parabolės lygtis: $x_2^2 = 5x_1$.

Direktrisės lygtis: $x_1 = -\frac{5}{4}$.

13.5. Bendroji kūgio pjūvio lygtis

Visų kūgio pjūvių lygtis galima parašyti viena bendrąja lygtimi. Tarkime, kad A, B, C, D, E, F – realieji skaičiai; čia A ir B abu yra teigiamieji arba neigiamieji.

Apskritimas: $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1 + Dx_2 + F = 0$; čia $A = B$.

Elipsė: $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1 + Dx_2 + Ex_1x_2 + F = 0$.

Hiperbolė: $Ax_1^2 - Bx_2^2 + Cx_1 + Dx_2 + Ex_1x_2 + F = 0$.

A, B, C, D, F – realieji skaičiai.

Parabolė: $Ax_1^2 + Cx_1 + Dx_2 + F = 0$ (šakos nukreiptos aukštyn/žemyn);

$Bx_2^2 + Cx_1 + Dx_2 + F = 0$ (šakos nukreiptos į dešinę/į kairę).

Pavyzdžiai. $36x_1^2 - 64x_2^2 - 36x_1 - 384x_2 - 711 = 0$. Hiperbolė, nes $A = 36$, $B = 64$.

$9x_1^2 + 9x_2^2 - 18x_1 - 20 = 0$. Apskritimas, nes $A = B = 9$.

Tarkime, kad $A = 1$, $B = 0$, $C = 4$, $D = -1$, $F = 4$. Kadangi $B = 0$, kalbama apie parabolę, kurios lygtis yra tokia: $x_1^2 + 4x_1 - x_2 + 4 = 0$.

14. Atvaizdžiai

Taškas $X(x_1;\ x_2)$, kurio spindulys vektorius $\vec{x}$, atvaizduotas į tašką $X'(x_1';\ x_2')$, kurio spindulys vektorius $\vec{x}'$.

14.1. Afinieji atvaizdžiai

Bendrosios sąvokos

Atvaizdis A vadinamas afiniuoju, kai jis tenkina šias sąlygas: A yra bijekcija, atvaizdžiu A tiesė atvaizduojama į tiesę, atkarpų santykis yra invariantiškas. Afinumas apibrėžtas vienareikšmiškai, kai bet kuriam trikampiui PQR yra priskirtas bet kuris trikampis $P'Q'R'$. Analiziškai šie atvaizdžiai apibūdinami arba tiesine lygčių sistema, arba vektorinėmis matricinėmis lygtimis.

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + t_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + t_2; \end{cases} \quad \text{čia } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\vec{x}' = M\vec{x} + \vec{t},\ M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Centrinis ištempis

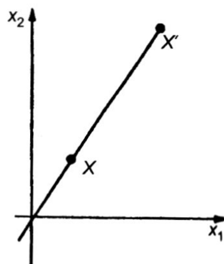
Jis turi daugiau nei dvi fiksuotas tieses, einančias per tašką. Kai ištempio centras C yra koordinačių pradžios taškas, teisingos formulės:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1, \\ x_2' = \lambda x_2; \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$\lambda \neq 0$ yra ištempio koeficientas.

Kai centras C nėra koordinačių pradžios taškas (jo spindulys vektorius $\vec{z} \neq \vec{O}$), teisingos formulės:

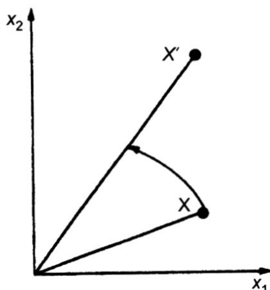
$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + (1-\lambda) z_1, \\ x_2' = \lambda x_2 + (1-\lambda) z_2. \end{cases}$$



Afinusis posūkis su ištempiu

Neturi fiksuotųjų tiesių, bet turi fiksuotąjį tašką. Tai koordinačių pradžios taškas. Teisingos tokios formulės:

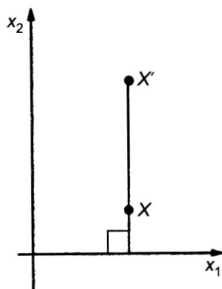
$$\begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_2, \\ x_2' = bx_1 + ax_2; \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$



Ištempis (sąspūdis)

Jis atliekamas statmenai ašiai Ox_1, jo koeficientas s:

$$\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = sx_2; \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$



14.2. Panašumo atvaizdžiai

Bendrosios sąvokos

Atvaizdis vadinamas panašumo atvaizdžiu, kai jis tenkina šias sąlygas: A yra afinusis atvaizdis, atvaizdžiu A gautų atkarpų ir pradinių atkarpų santykis yra konstanta $k > 0$ (vadinama panašumo koeficientu). Panašumo atvaizdis išsaugo kampus ir yra vienareikšmiškai apibrėžtas, kai bet kuriam trikampiui PQR yra priskirtas panašus trikampis $P'Q'R'$.

Posūkio ir ištempio kompozicija

Taškas pirmiausia pasukamas tam tikru kampu, o po to ištempiamas. Yra tiksliai vienas fiksuotasis taškas.

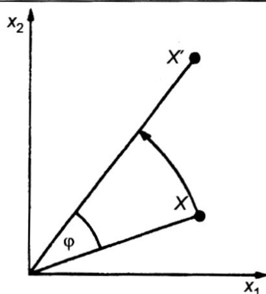
$$\begin{cases} x_1' = k\cos\varphi \cdot x_1 - k\sin\varphi \cdot x_2 + t_1, \\ x_2' = k\sin\varphi \cdot x_1 + k\cos\varphi \cdot x_2 + t_2; \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} k\cos\varphi & -k\sin\varphi \\ k\sin\varphi & k\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Kai $\varphi = 0$ arba $\varphi = \pi$, gaunamas centrinis ištempis.

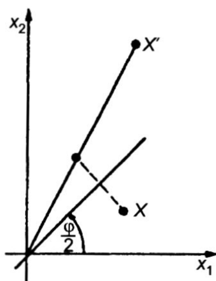
Ašinės simetrijos ir ištempio kompozicija

Taškas iš pradžių veidrodiškai atspindimas ašies atžvilgiu, po to – ištempiamas. Yra dvi viena kitai statmenos fiksuotosios tiesės, jų susikirtimo taškas yra fiksuotasis.

$$\begin{cases} x_1' = k\cos\varphi \cdot x_1 + k\sin\varphi \cdot x_2 + t_1, \\ x_2' = k\sin\varphi \cdot x_1 - k\cos\varphi \cdot x_2 + t_2; \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} k\cos\varphi & k\sin\varphi \\ k\sin\varphi & -k\cos\varphi \end{pmatrix}.$$



Posūkio ir ištempio kompozicija



Ašinės simetrijos ir ištempio kompozicija

Kai ištempiama koordinačių pradžios taško atžvilgiu, konstantos t_1 ir t_2 lygios nuliui.

14.3. Kongruentieji (lygumo) atvaizdžiai

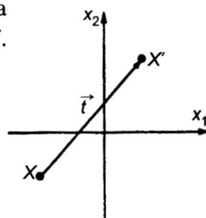
Bendrosios sąvokos

Atvaizdis A vadinamas kongruenčiuoju (lygumo) atvaizdžiu, kai jis tenkina sąlygas: A yra afinusis atvaizdis, jis išsaugo ilgius. Tuo pačiu lieka nepakitę kampai ir plotai. Kongruentumo atvaizdis yra vienareikšmis, kai kiekvienam trikampiui PQR yra priskirtas kongruentus (lygus) trikampis $P'Q'R'$.

Postūmis

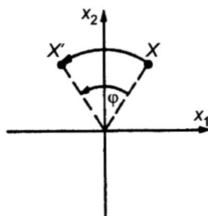
Taškas X perkeliamas išilgai vektoriaus $\vec{t}$.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + t_1, \\ x_2' = x_2 + t_2; \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Posūkis

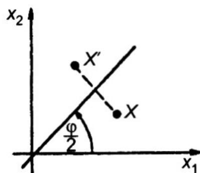
Taškas pasukamas apie koordinačių pradžią posūkio kampu $\varphi \neq 0$.



$$\begin{cases} x_1' = \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot x_2, \\ x_2' = \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2; \end{cases}$$
$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ašinė simetrija

Simetrijos ašis eina per koordinačių pradžią ir su ašimi x_1 sudaro posvyrio kampą $\frac{\varphi}{2}$, tad simetrijos ašies krypties koeficientas lygus $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.



$$\begin{cases} x_1' = \cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot x_2, \\ x_2' = \sin\varphi \cdot x_1 - \cos\varphi \cdot x_2; \end{cases}$$
$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys. Reikia rasti taško $P\,(1; -1)$ vaizdą, gautą ašine simetrija atžvilgiu tiesės, kurios posvyrio kampas lygus 30°.

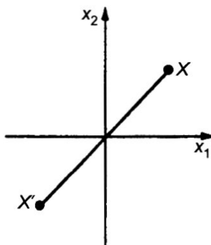
$$x_1' = \cos 60° \cdot 1 + \sin 60° \cdot (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$x_2' = \sin 60° \cdot 1 - \cos 60° \cdot (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Vaizdas $P'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3};\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Centrinė simetrija

Centras yra koordinačių pradžios taškas.



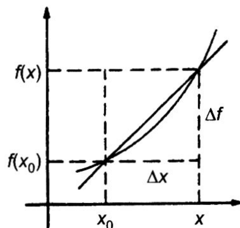
$$\begin{cases} x_1' = -x_1, \\ x_2' = -x_2; \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Diferencialinis skaičiavimas

15.1. Diferencijavimas

Skirtuminis santykis

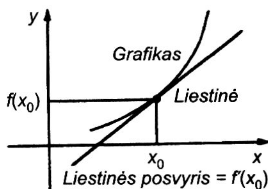
Tarkime, kad funkcija $f: x \to f(x)$ apibrėžta atvirajame intervale I, taškas $x_0 \in I$. Nedideli skirtumai žymimi taip: $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ ir $\Delta x = x - x_0$. Kintamąjį $x \neq x_0$ atitinkantis santykis $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vadinamas skirtuminiu santykiu. Geometriškai jis išreiškia per taškus M ir M_0 nubrėžtos kreivės kirstinės krypties koeficientą.



Išvestinė

Išvestinė apibūdina grafiko posvyrį taške x_0. Grafiko posvyris taške yra lygus per šį tašką nubrėžtos grafiko liestinės posvyriui.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$



Apskaičiuojant ribą reikalaujama, kad riba iš dešinės būtų lygi ribai iš kairės. dy ir dx vadinami diferencialais.

Pavyzdys. Reikia rasti funkcijos $f(x) = \frac{4}{x}$ grafiko posvyrį taške $P\left(3; \frac{4}{3}\right)$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{3}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{12 - 4x}{3x}}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{4(3 - x)}{3x(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-4}{3x} = -\frac{4}{9}.$$

15.2. Išvestinės

Išvestinė funkcija

Funkcijos $f(x)$ išvestinė funkcija (arba tiesiog išvestinė) $f'(x)$ kiekviename taške x_0 nusako grafiko posvyrį.

Kiekviena intervale I tolydi ir diferencijuojama funkcija f turi ją atitinkančią išvestinę funkciją f'. Funkcijų f ir f' apibrėžimo sritys ne visada yra lygios.

Funkcijos f' išvestinė funkcija yra f'', o jos išvestinė funkcija yra f''' ir t. t.

Išvestinių skaičiavimo taisyklės

Laipsninės funkcijos išvestinė:

$$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1};\ n\in \boldsymbol{Q}.$$

Pavyzdžiai: $f(x)=x^6 \Rightarrow f'(x)=6x^5;$

$$f(x)=x^1=x \Rightarrow f'(x)=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1;$$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Sumos išvestinė:

$$f(x)=u(x)+v(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x).$$

Pavyzdys: $f(x)=x^3+x^7 \Rightarrow f'(x)=3x^2+7x^6$.

Konstantos išvestinė:

$$f(x)=c\cdot u(x)\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x).$$

Pavyzdys: $f(x)=10x^5+5x \Rightarrow f'(x)=50x^4+5\cdot 1$.

Sandaugos išvestinė:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Pavyzdys: $f(x)=4x^5(x^7-x^2)$;

$u(x)=4x^5 \Rightarrow u'(x)=20x^4$,

$v(x)=x^7-x^2 \Rightarrow v'(x)=7x^6-2x$,

$f'(x)=20x^4(x^7-x^2)+4x^5(7x^6-2x)$.

Trupmenos išvestinė:

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Pavyzdys: $f(x)=\frac{3x^5}{10x-1}$;

$u(x)=3x^5 \Rightarrow u'(x)=15x^4$,

$v(x)=10x-1 \Rightarrow v'(x)=10$,

$$f'(x)=\frac{15x^4(10x-1)-3x^5\cdot 10}{(10x-1)^2}=\frac{120x^5-15x^4}{(10x-1)^2}.$$

Sudėtinės funkcijos išvestinė:

$$f(x)=u(v(x)) \Rightarrow f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x).$$

Norint išdiferencijuoti sudėtinę funkciją, pirmiausia surandama išorinės funkcijos išvestinė išsaugant vidinę funkciją ir gautas rezultatas padauginamas iš vidinės funkcijos išvestinės.

Pavyzdys: $f(x)=10\sqrt{x^4-3x^3}=10\cdot(x^4-3x^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=10\cdot\frac{1}{2}(x^4-3x^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x^3-9x^2)=\frac{5\cdot(4x^3-9x^2)}{\sqrt{x^4-3x^3}}.$$

Svarbiausios išvestinių formulės:

$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$;

$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$;

$f(x)=mx \Rightarrow f'(x)=m$;

$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$;

$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$;

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x;$$
$$f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x;$$
$$f(x)=\operatorname{tg} x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(\cos x)^2};$$
$$f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x;$$
$$f(x)=a^x\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\ln a.$$

Funkcijos su parametru išvestinė

Diferencijuojant parametras laikomas konstanta.

Pavyzdys: $f_t(x)=(t^2-2)x^4+2t^3\Rightarrow f_t'(x)=4(t^2-2)x^3+0.$

Lopitalio taisyklė

Tarkime, kad I yra atvirasis intervalas, taškas $x_0\in I$, $f(x)$ ir $g(x)$ – dvi realiosios funkcijos, tenkinančios sąlygas: $f(x_0)=g(x_0)=0$, f ir g yra diferencijuojamos intervale I, egzistuoja riba $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Tada teisinga lygybė:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jeigu pritaikius Lopitalio taisyklę vėl gaunami neapibrėžti reiškiniai, verta pabandyti dar kartą pritaikyti Lopitalio taisyklę.

Pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{x\cdot\sin x}.$

Išdiferencijavus skaitiklį ir vardiklį gaunama riba:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{\sin x+x\cdot\cos x}.$$

Skaitiklis ir vardiklis diferencijuojami dar kartą:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cdot\cos x}{2\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

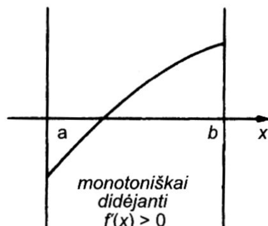
15.3. Kreivių tyrimas

Monotoniškumas, ekstremumo taškai

Sąlyga $f'(x) > 0$ intervale reiškia, kad $f(x)$ šiame intervale monotoniškai didėja.

Sąlyga $f'(x) < 0$ intervale reiškia, kad $f(x)$ šiame intervale monotoniškai mažėja.

Kiekviena intervale I diferencijuojama ir monotoninė funkcija šiame intervale turi atvirkštinę funkciją.



$f'(x_0) = 0$ reiškia, kad f taške x_0 gali turėti ekstremumą.

Šiame taške grafiko liestinės posvyris lygus 0 (horizontalioji liestinė).

Pavyzdys. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 16x + 1,\ f'(x) = 2(x^2 - 2x - 8)$.

Galimi ekstremumo taškai gaunami iš sąlygos $f'(x) = 0$:

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$.

$x < -2,\ f'(x) > 0,\ f$ yra monotoniškai didėjanti.

$-2 < x < 4,\ f'(x) < 0,\ f$ yra monotoniškai mažėjanti.

$x > 4,\ f'(x) > 0,\ f$ yra monotoniškai didėjanti.

Šie teiginiai gauti įrašius iš intervalų parinktas x reikšmes į išvestinės išraišką.

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ yra lokalusis maksimumas, taškas $(x_0;\ f(x_0))$ yra aukščiausias grafiko taškas (AGT). $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ yra lokalusis minimumas, taškas $(x_0;\ f(x_0))$ yra žemiausias grafiko taškas (ŽGT).

Pavyzdys: $f'(x) = 2(x^2 - 2x - 8)$ (prieš tai spręsto pavyzdžio tęsinys);

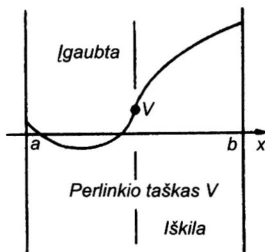
$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4,$$
$$f''(x) = 2(2x - 2),$$
$$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow \text{AGT}, \ f''(4) = 12 > 0 \Rightarrow \text{ŽGT}.$$

Kreivumas, perlinkio (vingio) taškai

Sąlyga $f''(x_0) > 0$ tam tikrame intervale reiškia, kad funkcijos f grafikas šiame intervale yra įgaubtas.

Sąlyga $f''(x_0) < 0$ tam tikrame intervale reiškia, kad funkcijos f grafikas šiame intervale yra iškilas.

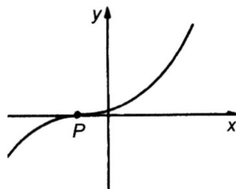
Funkcijos f grafiko taškas x_V yra perlinkio taškas, jeigu į kairę ir į dešinę nuo jo kreivės kreivumas yra skirtingo pobūdžio.



$f''(x_V) = 0 \wedge f'''(x_V) \neq 0 \Rightarrow$ taškas $V(x_V; f(x_V))$ yra funkcijos f grafiko perlinkio taškas (VT).

$f'(x_T) = 0 \wedge f''(x_T) = 0 \wedge f'''(x_T) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_T$ yra funkcijos grafiko pakopos taškas (PT). Pakopos taškas yra ašies Ox taškas, kai papildomai dar $f(x_T) = 0$.

Pakopos taškas tenkina būtinas ekstremumo ir perlinkio taško sąlygas.



Pakopos taškas P

Pavyzdys: $f(x) = x^3 - 3x^2, \ f'(x) = 3x^2 - 6x, \ f''(x) = 6x - 6;$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1;$$
$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0;$$
$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2.$$

VT (1; –2) yra perlinkio taškas.

Kreivės tyrimas

Kiekvienos funkcijos grafiką galima nubraižyti sudarius pakankamą funkcijos reikšmių lentelę ir pažymėjus grafiko taškus vieną po kito. Tačiau taikant diferencialinį skaičiavimą galima greičiau nubraižyti grafiką, ištyrus esmines funkcijos savybes. Tyrimo planas yra toks:

1) išsiaiškinamas grafiko simetriškumas;
2) randami grafiko ir ašių susikirtimo taškai;
3) randamos funkcijos lakūnos bei trūkio taškai;
4) randamos grafiko asimptotės;
5) apskaičiuojamos pirmosios bei antrosios išvestinės ir jų nuliai;
6) ištiriamas monotoniškumas ir kreivumas;
7) išsiaiškinamas ekstremumų tipas ir jų padėtis;
8) randami perlinkio taškai.

Paprastai žinant šias funkcijos ir jos grafiko savybes nesunku nubraižyti grafiką. Jeigu to nepakanka, reikia surasti keletą „atraminių“ taškų.

Pavyzdys. Nurodyta funkcija $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Simetriškumas

Grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu, nes f yra nelyginė funkcija:

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\ f(-x)=-x-\frac{1}{x}.$$

Nuliai

Funkcija neturi nulių, nes $\frac{x^2+1}{x}\neq 0$ su visais $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Poliai

Trupmenos $\frac{x^2+1}{x}$ vardiklis turi nulį $x = 0$, kuris nėra skaitiklio nulis, taigi $x = 0$ yra f polius.

Lakūnos

Funkcija neturi lakūnų.

Funkcijos pobūdis poliuose

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty.$$

Funkcijos pobūdis kraštuose

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

Vertikaliosios asimptotės

$g_1 : x = 0$ (ašis Oy).

Pasvirosios asimptotės

$g_2 : y = x$ (pirmojo ketvirčio pusiaukampinė) yra pasviroji asimptotė, nes

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{1}{x} - x\right) = 0.$

Išvestinės ir jų nuliai

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2};$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1;$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$, f'' nulių neturi.

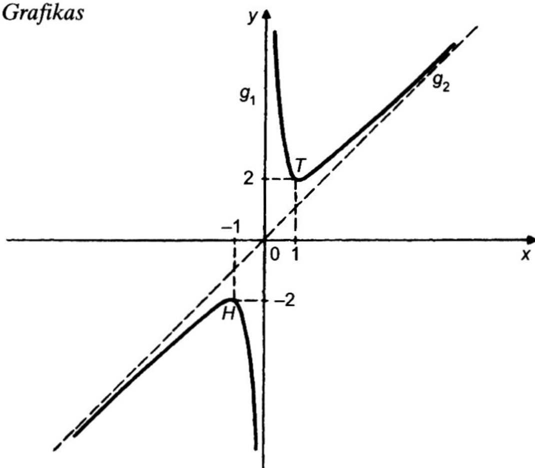
Monotoniškumas

$x < -1$, f monotoniškai didėja;

$-1 < x < 1$, f monotoniškai mažėja;

$x > 1$, f monotoniškai didėja.

Grafikas



Iš monotoniškumo išplaukia, kad aukščiausio taško abscisė $x = -1$, o žemiausio taško – $x = 1$.

Ekstremumo padėtis

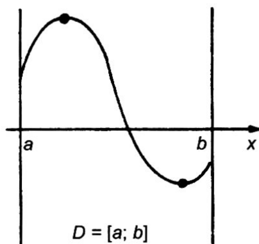
$f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, taigi aukščiausias taškas $H(-1; -2)$ ir žemiausias taškas $T(1; 2)$.

15.4. Ekstremumo uždaviniai

Apibrėžimai

Matematikos taikymuose dažnai tenka spręsti problemas, susijusias su funkcijų didžiausiųjų ir mažiausiųjų reikšmių suradimu. Tokios funkcijos vadinamos tikslo funkcijomis.

Panaudojant diferencialinį skaičiavimą galima surasti lokaliuosius ekstremumus tuose apibrėžimo srities taškuose, kuriuose funkcija yra mažiausiai du kartus diferencijuojama. Kiti lokalieji ekstremumai gali būti tuose apibrėžimo srities taškuose, kuriuose funkcija nediferencijuojama. Palyginus funkcijos reikšmes lokaliųjų ekstremumų taškuose, išrenkamos didžiausios ir mažiausios jos reikšmės. Kadangi dažniausiai apibrėžimo sritis yra uždarasis intervalas, tai lokaliuosius ekstremumus dar reikia palyginti su funkcijos reikšmėmis, įgyjamomis intervalo galuose.



Pavyzdys. Iš visų V tūrio skardinių (stačiųjų ritinių) reikia išrinkti tą, kurios visas paviršiaus plotas būtų mažiausias.

Tikslo funkcijos sudarymas. Kai x yra stačiojo ritinio spindulys, o y – aukštinė, tai visas paviršiaus plotas bei tūris apskaičiuojami pagal formules (žr. 10.4 skyrelį, p. 256): $S = 2\pi x^2 + 2\pi x y$, $V = \pi x^2 y$. Suradus y iš antrosios lygties ir įrašius šią jo išraišką į pirmąją lygtį, gaunama tiks-

lo funkcija, nusakanti viso paviršiaus ploto priklausomybę nuo spindulio x.

$y = \frac{V}{\pi x^2}$ įrašomas į $S = 2\pi x^2 + 2\pi x y \Rightarrow S = 2\left(\pi x^2 + \frac{V}{x}\right)$.

Tikslo funkcijos apibrėžimo sritis: $x \in \boldsymbol{R}^+$.

Tikslo funkcijos išvestinės:

$S'(x) = 2\left(2\pi x - \frac{V}{x^2}\right)$ ir $S''(x) = 4\left(\pi + \frac{V}{x^3}\right)$.

Lokaliųjų ekstremumų skaičiavimas:

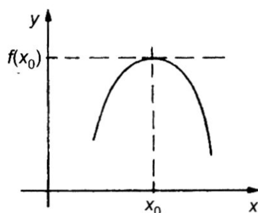
$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\pi x - \frac{V}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Yra tik vienas ekstremumas, įgyjamas vidiniame apibrėžimo srities taške.

Ekstremumo tipas: $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0 \Rightarrow$ minimumas, kreivė įgaubta. Apibrėžimo srities kraštuose ekstremumų nėra, kadangi tūris yra baigtinis. Vadinasi, kai spindulys $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, visas paviršiaus plotas yra minimalus, jo reikšmė $S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

15.5. Vidurinių reikšmių teoremos

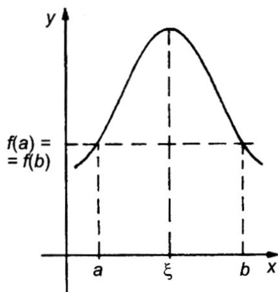
Ferma teorema

Kai atvirajame intervale I diferencijuojama funkcija f jo taške $x_0 \in I$ įgyja lokalųjį ekstremumą (maksimumą arba minimumą), tai $f'(x_0) = 0$.



Rolio teorema

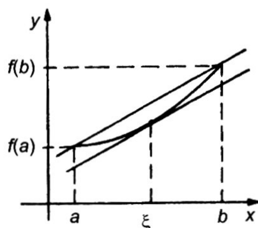
Tarkime, kad funkcija $f: x \to$ $\to f(x)$, $x \in [a;\ b]$, $a < b$ yra tolydi uždarajame intervale $[a;\ b]$, diferencijuojama atvirajame intervale $(a;\ b)$ ir $f(a) = f(b)$. Tada yra bent vienas vidinis intervalo taškas ξ, kuriame $f'(\xi) = 0$.



Kai tenkinamos Rolio teoremos sąlygos, egzistuoja bent vienas vidinis intervalo taškas, kuriame kreivės liestinė yra lygiagreti su ašimi *Ox*.

Lagranžo teorema (vidurinės reikšmės teorema)

Tarkime, kad funkcija $f: x \to$ $\to f(x)$, $x \in [a;\ b]$, $a < b$ yra tolydi uždarajame intervale $[a;\ b]$, diferencijuojama atvirajame intervale $(a;\ b)$. Tada yra bent vienas vidinis intervalo taškas $\xi \in (a;\ b)$, kuriame $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Kai tenkinamos Lagranžo teoremos sąlygos, egzistuoja bent vienas vidinis intervalo taškas, kuriame kreivės liestinė yra lygiagreti su kirstine, nubrėžta per taškus $A(a;\ f(a))$ ir $B(b;\ f(b))$, jų krypčių koeficientai yra lygūs.

16. Integralinis skaičiavimas

16.1. Pirmykštės funkcijos

Tarkime, kad $f(x)$ apibrėžta, kai $x \in [a; b]$.

Funkcija $F(x)$ vadinama funkcijos $f(x)$ pirmykšte funkcija intervale $[a; b]$, jeigu visuose šio intervalo taškuose $F'(x) = f(x)$. Panaudojant integralo ženklą, simboliais pirmykštė funkcija užrašoma taip: $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$.

Pirmykščių funkcijų šeima vadinama neapibrėžtiniu integralu, $f(x)$ – pointegralinė funkcija, C – integravimo konstanta.

Pirmykštės funkcijos suradimas yra atvirkštinė diferencijavimui operacija. Pirmykštės funkcijos paprastai žymimos didžiosiomis raidėmis F, G, U, V. Kai F yra f pirmykštė funkcija, tai $F_C = F + C$ irgi yra f pirmykštė funkcija.

Pavyzdys. Funkcijos $F_C = \frac{1}{8}x^4 + C$ yra $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ pirmykštės funkcijos.

Taisyklės

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1;$$
$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow F(x) = U(x) + V(x);$$
$$f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow F(x) = c \cdot U(x).$$

Pavyzdys: $f(x) = 6x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 5 \Rightarrow F_C(x) = \frac{6}{5}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + 5x + C.$

Pagrindiniai integralai

Mokant išvestinių formules, galima gauti pagrindinių integralų formules. Kai integruojamos kitokios funkcijos, pirmiausia reikia pertvarkyti pointegralines funkcijas taip, kad būtų gauti pagrindiniai integralai. Tačiau surasti daugelio funkcijų pirmykštes funkcijas būna sunku arba apskritai neįmanoma.

$f(x)=\frac{1}{x},\ x>0;$ $F_C(x)=\ln x+C;$

$f(x)=\frac{1}{x^2},\ x\neq 0;$ $F_C(x)=-\frac{1}{x}+C;$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0;$ $F_C(x)=2\sqrt{x}+C;$

$f(x)=e^x;$ $F_C(x)=e^x+C;$

$f(x)=a^x,\ x>0,\ x\neq 1;$ $F_C(x)=a^x\cdot\frac{1}{\ln a}+C;$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2};$ $F_C(x)=\operatorname{arctg} x+C;$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1;$ $F_C(x)=\arcsin x+C;$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$ $F_C(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C;$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ |x|>1;$ $F_C(x)=\left|\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right|+C;$

$f(x)=\sin x;$ $F_C(x)=-\cos x+C;$

$f(x)=\cos x;$ $F_C(x)=\sin x+C;$

$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x};$ $F_C(x)=-\operatorname{ctg} x+C;$

$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x};$ $F_C(x)=\operatorname{tg} x+C.$

16.2. Apibrėžtiniai integralai

Apibrėžimas

Kai f yra integruojamoji funkcija ir F – jos pirmykštė funkcija uždarajame intervale $[a;\ b]$, tai pirmykštės funkcijos reikšmių skirtumas išreiškiamas apibrėžtiniu integralu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. a ir b lai-

komi integravimo rėžiais. Ši formulė vadinama Niutono ir Leibnico formule ir ją galima griežtai įrodyti.

Skaičiuojant apibrėžtinius integralus, vartojamas simbolis $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$.

Niutono ir Leibnico formulė: $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Taigi priešingai neapibrėžtiniams integralams, kurie yra funkcijos, apibrėžtiniai integralai yra skaičiai.

Pavyzdys: $$\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}\bigg|_1^2 = \frac{2^5}{5}-\frac{1^5}{5} = 6{,}2.$$

Savybės

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$f(x)\le g(x)$ su visais $x\in[a;\ b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

16.3. Integravimo metodai

Norint surasti pirmykštę funkciją, pirmiausia reikia pertvarkyti daugumą integruojamųjų funkcijų.

Pointegralinių funkcijų skaidymas

Pavyzdys: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^3+x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\left(x^2+1\right)+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(x+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2+2\operatorname{arctg}x\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2+2\operatorname{arctg}1\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\operatorname{arctg}(-1)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Kintamųjų keitimas

1 pavyzdys. $\int\limits_{0}^{3}x\cdot\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$. Kintamąjį pakeisime pažymėdami

$\sqrt{1+x}=t\Leftrightarrow 1+x=t^2\Leftrightarrow x=t^2-1$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Viršutinis rėžis: $x=3\Rightarrow t=2$.

Apatinis rėžis: $x=0\Rightarrow t=1$.

$$\int\limits_{1}^{2}\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\cdot\mathrm{d}t=\left(2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{116}{15}.$$

2 pavyzdys. $\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, $a>0$.

Keitinys: $x=a\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Viršutinis rėžis: $x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Apatinis rėžis: $x=0\Rightarrow t=0$.

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\cdot\sin^2 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}a\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=$$

$=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$. Pertvarkis: $2\cos^2 t=1+\cos 2t$.

$$\left(\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{a^2}{2}\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Integravimas dalimis

Iš sandaugos išvestinės formulės išplaukia tokia integravimo formulė:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ši formulė taikoma, kai nežinant $u(x)\cdot v'(x)$ pirmykštės funkcijos yra žinoma $v(x)\cdot u'(x)$ pirmykštė funkcija.

Pavyzdys: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\sin x\mathrm{d}x =$ (pirmasis integravimo dalimis metodo taikymas).

Dalinės funkcijos: $u = x^2$, $u' = 2x$ ir $v' = \sin x$, $v = -\cos x$.

$= \left(-x^2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\mathrm{d}x =$ (antrasis integravimo dalimis metodo taikymas).

Dalinės funkcijos: $u = x$, $u' = 1$ ir $v' = \cos x$, $v = \sin x$.

$$= \left(-x^2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cdot\left(\left(x\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \left(-x^2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cdot\left(\left(x\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}\cdot 0 - 0 + 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0 + 0 - 1\right) = \pi - 2 = 1{,}14.$$

Netiesioginiai integralai

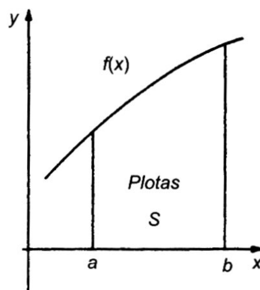
Jeigu integralas $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ turi ribą, kai $b \to +\infty$, ši riba vadinama netiesioginiu integralu $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Pavyzdys: $$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_3^b x^{-4}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_3^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{81}\right)=\frac{1}{81}.$$

Kai pointegralinė funkcija $f(x)$ nėra apibrėžta taške u, tačiau integralas turi ribą šiame taške, šita riba vadinama netiesioginiu integralu $\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$.

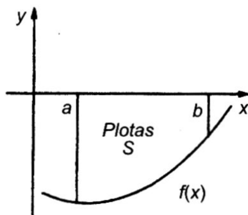
Pavyzdys: $$\int_0^1\left(2x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0}\int_u^1\left(2x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{2}x^4+2\sqrt{x}\right)\Bigg|_u^1 = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{1}-\frac{u^4}{2}-2\sqrt{u}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+2=2,5.$$

16.4. Ploto skaičiavimas



Tarkime, kad intervale $[a;\ b]$ yra apibrėžta tolydi funkcija f, be to, $f(x)\geq 0$ su visais $x\in[a;\ b]$. Funkcijos f grafikas, ašis Ox ir dvi su ašimi Oy lygiagrečios tiesės riboja plokštumos dalį, vadinamą kreivine trapecija. Jos plotą pažymėkime S:

$$S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a);$$



a – apatinis rėžis, b – viršutinis rėžis, $F(x)$ – $f(x)$ pirmykštė funkcija.

Kai f intervale $[a;\,b]$ yra tolydi, tačiau $f(x)\geq 0$ ne su visais $x\in[a;\,b]$, tai plotas

$$S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$$

Pavyzdys: $$S=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}x^4\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(\frac{1}{4}\cdot x^2-\frac{1}{50}\cdot x^5\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{4}\cdot 2^2-\frac{1}{50}\cdot 2^5-$$

$$-\left(\frac{1}{4}\cdot 1^2-\frac{1}{50}\cdot 1^5\right)=0{,}13.$$

Kai visa kreivinė trapecija yra po ašimi Ox, teisinga formulė:

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|F(b)-F(a)\right|.$$

Kai kreivinė figūra yra tarp dviejų funkcijų f ir g grafikų, jos plotas išreiškiamas taip:

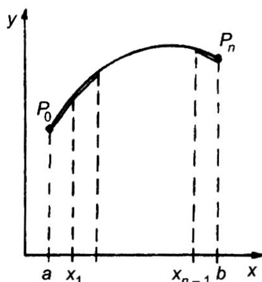
plotas tarp dviejų grafikų

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x.$$

a ir b yra grafikų susikirtimo taškų abscisės. Formulė teisinga neatsižvelgiant į grafikų padėtį koordinačių sistemoje.

Skaitinis integravimas

Kai funkcija nusakoma tik reikšmių lentele (tai dažnai būdinga taikymo uždaviniams), ploto reikšmę galima rasti apytiksliai, naudojantis skaitiniu integravimu.



Tarp daugelio skaitinio integravimo metodų vienas svarbiausių yra vadinamasis trapecijų metodas.

Tarkime, kad žinomos $n + 1$ grafiko taško koordinatės. Taško P_0 abscisė $x_0 = a$ yra apibrėžtinio integralo apatinis rėžis, taško P_n abscisė $x_n = b$ – viršutinis rėžis. Taškų abscisės turi būti ekvidistantiškos, taigi vienodai nutolusios viena nuo kitos pastoviu atstumu Δx. Pakeitus grafiko lanką, jungiantį kiekvienus du gretimus taškus, per tuos du taškus nubrėžtomis stygomis, ieškomos figūros plotas bus pakeistas jo artiniu – n trapecijų plotų suma.

Apytikslė integralo reikšmė gaunama sudedant atskirų trapecijų plotus:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Delta x}{2} \cdot \left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

Integralas su kintamu viršutiniu rėžiu

Taip vadinama funkcija $I : t \to \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,\ t \in [a; b].$

Šio apibrėžtinio integralo apatinis rėžis yra pastovus, o viršutinis – kintamas.

Savybės

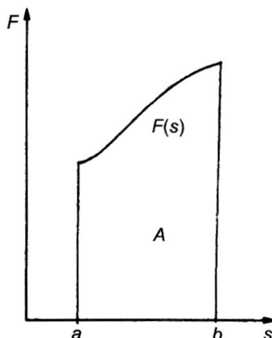
Jeigu funkcija f yra tolydi intervale $[a; b]$, tai ją atitinkanti funkcija I yra diferencijuojama intervale $[a; b]$ (kraštiniuose taškuose nagrinėjamos vienpusės išvestinės), be to, $I'(t) = f(t)$.

Jeigu f yra integruojama intervale $[a; b]$ ir $f(x) \geq 0$ su visais $x \in [a; b]$, tai funkcija I yra monotoniškai didėjanti intervale $[a; b]$.

16.5. Taikymai fizikoje

Darbas

Jėga, perkeldama masės tašką iš vienos padėties į kitą, atlieka darbą. Kai taško nueitas kelias yra tiesus, jo ilgis $\Delta s = s_2 - s_1$, jėga yra pastovi ir jos modulis lygus F, jėgos kryptis sutampa su judėjimo kryptimi, tai darbas apskaičiuojamas taip: $A = F \cdot (s_2 - s_1)$. Tačiau tada, kai jėga yra kintama, ši formulė apskaičiuoti darbui netinka. Pažymėkime nueitą kelią intervalu $[a; b]$, jėgos modulį – $F(s)$. Kai $F(s)$ – integruojamoji funkcija, tai teisinga formulė:



jėgos darbas	$A = \int_a^b F(s)\,ds.$

Pavyzdys. Jėga $F(s)$ ištempia spyruoklę, kurios vienas galas įtvirtintas. Ši jėga yra proporcinga spyruoklės deformacijai – atstumui nuo ištempto jos galo iki įtvirtinto galo. Reikia rasti darbą, kuris atliekamas ištempiant spyruoklę atstumu $\Delta s = b - a$.

$$F(s) = D \cdot s,\ D = \text{const}.$$

$$A = \int_a^b F(s)\,ds = \int_a^b D \cdot s\,ds = D\int_a^b s\,ds = \frac{D}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Elektros srovės darbas

Tarkime, kad $i(t)$ yra srovės stipris, $u(t)$ – įtampa laiko momentu t. Tada momentinis našumas yra $P(t) = u(t) \cdot i(t)$. Pažymėjus iki laiko t atliktą darbą $A(t)$, galima parašyti $P(t) = A'(t)$ arba $P(t) = \frac{dA(t)}{dt}$.

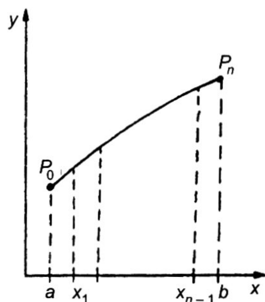
Tokiu būdu per laiko intervalą $[t_1; t_2]$ atliktas darbas $A = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t)\,dt$.

16.6. Kūnų elementų skaičiavimas

Kreivės lanko ilgis

Tarkime, kad funkcijos $f: x \to f(x)$ apibrėžimo sritis yra $[a; b]$, jos išvestinė f' yra tolydi intervale $[a; b]$. Tada funkcijos f grafikas yra glodus kreivės lankas, kurio ilgis

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$



Pavyzdys. $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ x \in [0; 1]$. Funkcijos f grafikas yra parabolės lankas, $f'(x) = x \Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$.

Sukinio tūris

Tarkime, kad funkcija $f: x \to f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi intervale $[a; b]$. Figūra, esanti tarp grafiko ir ašies Ox, sukama apie ašį Ox. Taip gauto sukinio tūris apskaičiuojamas pagal formulę

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Pavyzdys: $f: x \to \sqrt{x},\ x \in [a; b]$;

$$V = \pi \int_a^b x\,dx = \pi \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_a^b = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2).$$

Sukimosi paviršiaus plotas

Tarkime, kad funkcija $f: x \to f(x)$ apibrėžta intervale $[a; b]$ ir jos išvestinė f' yra tolydi šiame intervale. Tada f grafikas yra glodus kreivės lankas. Sukant jį apie ašį Ox gaunamas sukimosi paviršius, kurio plotas apskaičiuojamas taip:

sukimosi paviršiaus plotas

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Pavyzdys. $f : x \to \frac{1}{3}x^3$, $x \in [0;\ 1]$. Kubinės parabolės lankas sukamas apie ašį Ox.

$$f'(x) = x^2 \Rightarrow \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1+x^4},$$

$$S = \frac{2}{3}\pi \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Panaudojus keitinį $x = \varphi(t) = \sqrt[4]{t^2-1}$, $t \in \left[1;\ \sqrt{2}\right]$, gaunama $\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{2\sqrt[4]{\left(t^2-1\right)^3}}$

ir $S = \frac{2}{3}\pi \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\left(t^2-1\right)^3} \cdot t \cdot \frac{t}{2\sqrt[4]{\left(t^2-1\right)^3}}\,\mathrm{d}t = 0{,}638.$

Sukinio svorio centras

Tarkime, kad funkcija $f : x \to f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi intervale $[a;\ b]$. Figūra, esanti tarp grafiko ir ašies Ox, sukama apie ašį Ox. Taip gauto sukinio svorio centro $S(x_s;\ y_s)$ bei kreivės lanko svorio centro $S(x_0;\ y_0)$ koordinatės apskaičiuojamos pagal formules:

$$x_s \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x; \quad y_s \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x;$$

$$s \cdot x_0 = \int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x; \quad s \cdot y_0 = \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x;$$

čia $s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

Guldino teoremos

Sukinio tūris V yra lygus sukamos figūros plotui S, padaugintam iš kelio, kurį nueina jos svorio centras.

Kai sukama apie ašį Ox, tai $V = S \cdot 2y_s \cdot \pi$.

Sukinio paviršiaus plotas S lygus sukamo lanko ilgiui l, padaugintam iš kelio, kurį nueina jo svorio centras.

Kai sukama apie ašį Ox, tai $S = l \cdot 2y_0 \cdot \pi$.

17. Stochastika

17.1. Duomenų rinkimas

Generalinė aibė

Aprašomosios statistikos uždavinys – duomenų iš generalinės aibės rinkimas ir apibūdinimas.

> Generalinė aibė (taip pat populiacija arba požymio nešėjų aibė) – tai aibė, sudaryta iš objektų, kuriems būdingas tos pačios rūšies požymis, vertinant jį iš tyrimo tikslo pozicijų.

Generalinės aibės apimtis N yra lygi jos objektų skaičiui. Kiekvienam objektui priskirtas jo simbolis (ε_k) ir tam objektui būdinga požymio reikšmė (α_k), $k = 1, 2, 3, ..., N$.

Pavyzdžiai. Visi tam tikros apskrities rinkėjai sudaro generalinę aibę. (ε_k) yra asmenų pavardės, (α_k) – kandidatai, už kuriuos jie balsavo.

Visos kondensuoto pieno skardinės, pagamintos tam tikroje gamykloje per vieną dieną, sudaro generalinę aibę. (ε_k) yra skardinės numeris, (α_k) – skardinės masė gramais.

Tam tikros generalinės aibės objektai gali būti išrenkami ir pagal didesnį požymių (α, β, γ, δ, ...) kiekį. Per gyventojų surašymą užfiksuoti asmenys sudaro generalinę aibę. (ε_k) – asmenų pavardės, (α_k) – asmens lytis, (β_k) – šeiminė padėtis, (γ_k) – amžius ir t. t.

Požymiai

Panagrinėjus pavyzdžius aiškėja, kad yra du skirtingi požymių tipai. Kokybiniai požymiai siejasi su tokiomis savybėmis kaip „gerai“, „blogai“, „šeiminė padėtis“, „lytis“ ir t. t. Kiekybiniai požymiai apibūdinami išmatuojamais dydžiais (amžius, svoris ir t. t.).

Duomenų rinkimas

Tarkime, kad iš generalinės požymio nešėjų aibės sudaromas tam tikras poaibis. To poaibio išmatuotų požymio reikšmių visuma vadinama statistiniu rinkiniu. Reikšmės, surašytos ta tvarka, kuria jos buvo gautos statistinio rinkimo metu, sudaro reikšmių statistinę eilutę.

17.2. Dažnių skirstinys

Statistine eilute pateikti duomenys yra nesutvarkyti. Norint padaryti šiuos duomenis vaizdesnius, jie sutvarkomi pasitelkus rangavimo principus ir duomenis iš dalies suglaudinant.

Kokybiniai požymiai

Reikšmės sujungiamos pagal kategorijas, tai pačiai kategorijai priklausančių reikšmių kiekis vadinamas absoliučiuoju dažniu. Taip gaunamas dažnių skirstinys:

Kategorija	Požymio realizacijos	Absoliutusis dažnis	Santykinis dažnis
1	x_1	f_1	h_1
2	x_2	f_2	h_2
...	...	...	...
m	x_m	f_m	h_m

Čia m – kategorijų kiekis, f_i – kiekvienos požymio realizacijos absoliutusis dažnis ($f_1 + f_2 + ... + f_m = N$), h_i – kiekvienos požymio realizacijos santykinis dažnis, $1 \le i \le m$.

$$\left(h_i = \frac{f_i}{N}; \text{ čia } h_1 + h_2 + ... + h_m = \frac{f_1}{N} + \frac{f_2}{N} + ... + \frac{f_m}{N} = 1.\right)$$

Pavyzdys. Mokykloje buvo apklausta 80 mokinių norint išsiaiškinti, kiek jų į mokyklą atvažiuoja visuomeniniu transportu ir kiek ne. Rezultatai pateikti tokiu dažnių skirstiniu:

Kategorija	Požymio realizacijos	Absoliutusis dažnis	Santykinis dažnis
1	Atvažiuojantys visuomeniniu transportu	26	0,325
2	Neatvažiuojantys visuomeniniu transportu	54	0,675

Kiekybiniai požymiai

Vienodos kiekybinio požymio reikšmės sujungtos toje pačioje realizacijoje. Dažnių skirstinys sudaromas panašiai kaip buvo daroma prieš tai, nagrinėjant kokybinius požymius.

Pavyzdys. 32 asmenys atsakinėjo į testo klausimus. Laikas minutėmis, kurį jie užtruko atsakydami į testo klausimus, buvo surašytas statistine eilute: 1, 5, 4, 4, 2, 3, 1, 6, 3, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 2, 3, 2, 6, 4, 3, 4, 3, 6, 2, 4, 3, 4, 3, 3, 3, 2.

Laikas, min	Absoliutusis dažnis	Santykinis dažnis
1	2	0,0625
2	5	0,156
3	11	0,344
4	9	0,281
5	2	0,0625
6	3	0,094
Suma	32	1,0000

Kiekybinio požymio dažnių skirstinys nėra vaizdus, nes pateikta labai daug požymio realizacijų. Šiuo atveju gretimos realizacijos sujungiamos į klases ir gaunamas sugrupuotų duomenų skirstinys. Klasėms pažymėti pasirenkamas jų vidurys. Klasės plotis b gaunamas kaip dviejų vienas po kito einančių vidurių skirtumas. Jis parenkamas pagal poreikį ir nebūtinai turi būti pastovus.

Dažnai tenka sudaryti dviejų požymių dažnių skirstinius. Tokie skirstiniai vadinami dvimačiais. Kai $x_1, x_2, ..., x_m$ yra m pirmojo požymio realizacijų, $y_1, y_2, ..., y_n$ – n antrojo požymio realizacijų, tai absoliučiųjų dažnių skirstinys pateikiamas stačiakampe matrica (f_{ik}), $i = 1, 2, ..., m$,

$k = 1, 2, ..., n$. Pavyzdžiui, f_{31} yra objekto, kuriam būdingas tiek požymis x_3, tiek ir požymis y_1, dažnis.

Pavyzdys. 280 darbuotojų buvo apklausti norint sužinoti, koks jų atlyginimas. Apklausos rezultatai sutraukti į tokį dažnių skirstinį.

Klasės, eurais	Klasės vidurys	Absoliutusis dažnis	Santykinis dažnis
mažiau negu 1600	1500	12	0,043
nuo 1600 iki mažiau nei 1800	1700	18	0,064
nuo 1800 iki mažiau nei 2000	1900	26	0,093
nuo 2000 iki mažiau nei 2200	2100	35	0,125
nuo 2200 iki mažiau nei 2400	2300	40	0,143
nuo 2400 iki mažiau nei 2600	2500	59	0,211
nuo 2600 iki mažiau nei 3000	2800	45	0,161
nuo 3000 iki mažiau nei 3400	3200	32	0,114
virš 3400	3600	13	0,046

Klasių kiekis $m = 9$, rinkinio apimtis $N = 280$.
1 ir 9 klasė vadinamos atvirosiomis, nuo 2 iki 6 klasių plotis lygus 200 eurų, 7 ir 8 klasės plotis lygus 400 eurų.

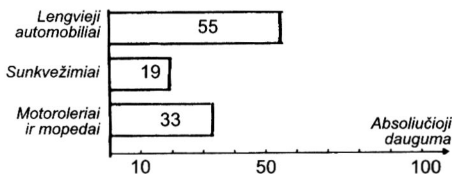
Kokybinių požymių diagramos

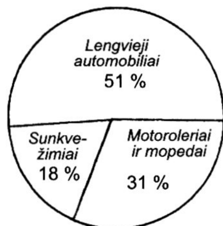
Juostinė ir skritulinė diagramos

Juostinėse diagramose juostos ilgis lygus dažniui. Juostos plotis bei plotas yra tiek pat nesvarbūs kaip ir jos padėtis paveiksle. Skritulinėse diagramose dažniai vaizduojami išpjovų plotais arba centrinių kampų didumais.

Norint, kad duomenys būtų vaizdesni ir juos būtų lengviau palyginti, kokybinių požymių dažnių skirstiniai vaizduojami toje pačioje koordinačių sistemoje. Kartu požymių kategorijos sunumeruojamos arba joms priskiriami apibrėžti kodai.

Pavyzdys. Buvo suskaičiuota, kiek motorinių priemonių pravažiuoja miesto B pakraštyje esančia gatve A nuo 10.00 iki 16.30 val.





Juostinė diagrama Skritulinė diagrama

Nominalioji skalė

> Ji sudaroma priskiriant kategorijoms skaičius, neatsižvelgiant į tai, kokią vietą rangų eilutėje užima kategorija.

Pavyzdys. Kiekvieno žemyno gyventojų kiekį reikia pavaizduoti koordinačių sistemoje. Žemynus reikia sunumeruoti (nekreipiant dėmesio į jų užimamą vietą rangų eilutėje).

Požymių kategorija	Raktinis numeris
Azija	1
Amerika	2
Australija	3
Europa	4
Afrika	5
Antarktida	6

Rangų skalė

> Ji sudaroma, atsižvelgiant į tokį kategorijų palyginimą: ar jos yra didesnės, ar mažesnės, ar lygios viena kitai.

Pavyzdys. Asmenų grupė apklausta norint išsiaiškinti, koks jų požiūris į tam tikrą temų kompleksą. Užfiksuotos tokios požymių kategorijos: požiūris yra „labai teigiamas“, „teigiamas“, „neutralus“, „neigiamas“ ir „labai neigiamas“. Vie-

nas galimas būdas, kaip suteikti duomenims kiekybinį atspalvį, yra toks:

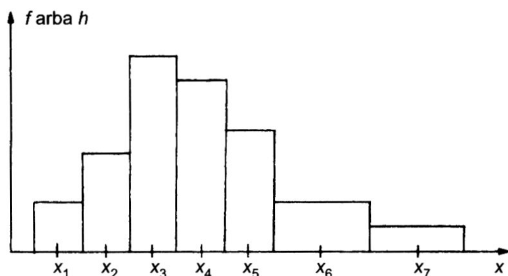
Požymių kategorija	Raktinis numeris
labai teigiamas	+2
teigiamas	+1
neutralus	0
neigiamas	–1
labai neigiamas	–2

Kiekybinio požymio diagrama

Kadangi kiekybinės požymio reikšmės yra išmatuojamos, tai galima jo dažnių skirstinį pateikti $x - f$ diagrama kaip taškų seką. Statistikoje labiau įprasta duomenis vaizduoti histograma.

> Kiekvienos požymio realizacijos dažnis vaizduojamas stačiakampiu, kurio plotas lygus tos realizacijos dažniui.

Pavyzdys. Sugrupuotų diagramų pavaizdavimas histograma. Kai stačiakampio pagrindas lygus dvigubam klasės pločiui, tai jo aukštis lygus dažnio pusei. Atsižvelgiama ir į atvirųjų klasių kraštuose vaizdavimą.



Sukauptųjų dažnių skirstinys

> Nuosekliai pridedant prie pirmosios absoliučiojo (santykinio) dažnio reikšmės antrojo dažnio reikšmę, po to prie gautojo rezultato trečiojo dažnio reikšmę ir t. t., gaunamas sukauptųjų dažnių (absoliučiųjų arba santykinių) skirstinys.

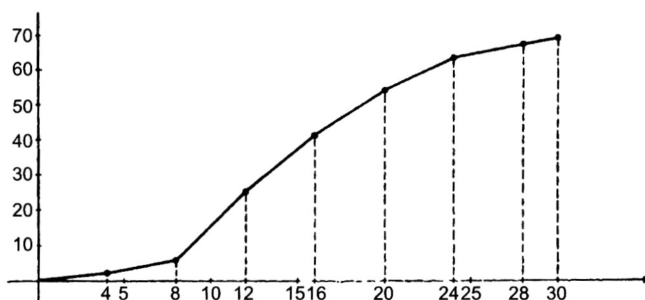
Pasinaudojant sukauptaisiais dažniais galima išsiaiškinti, kiek yra požymio reikšmių, didesnių arba mažesnių už tam tikrą realizaciją. Pažymėjus koordinačių sistemoje taškus, kurių abscisės yra viršutiniai klasės kraštai, o ordinatės – atitinkamos sukauptųjų dažnių reikšmės, bei sujungus juos tiesių atkarpomis, gaunama sukauptųjų dažnių laužtė.

Pavyzdys. Tinkamumo testą laikė 70 asmenų. Jų padarytų klaidų dažnių skirstinys yra toks:

Klaidų klasė	Klasės vidurys x_k	Absoliutusis dažnis f_k	Absoliutusis sukauptasis dažnis F_k
nuo 0 iki mažiau nei 4	2	2	2
nuo 4 iki mažiau nei 8	6	4	6
nuo 8 iki mažiau nei 12	10	19	25
nuo 12 iki mažiau nei 16	14	16	41
nuo 16 iki mažiau nei 20	18	14	55
nuo 20 iki mažiau nei 24	22	9	64
nuo 24 iki mažiau nei 28	26	4	68
nuo 28 iki 30	29	2	70

Pavyzdžiui, gaunama $F_4 = 2 + 4 + 19 + 16 = 41$.

Sukauptųjų dažnių laužtė



17.3. Vidurinės reikšmės

Kadangi dažnių lentelėje visada yra daug informacinės medžiagos, duomenis ir toliau reikia tvarkyti, priskiriant jiems mažesnį kiekį api-

būdinančių skaitinių charakteristikų (parametrų). Toks parametras yra skirstinio vidurinė reikšmė.

Paprastasis aritmetinis vidurkis

Kai duomenys nėra suklasifikuoti, randama jų suma ir ši reikšmė padalijama iš duomenų kiekio. Pažymėjus išmatuotas reikšmes simboliais x_1, x_2, ..., x_N, jų aritmetinis vidurkis $\bar{x}$ randamas taip:

paprastasis aritmetinis vidurkis

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k .$$

Svertinis aritmetinis vidurkis

Kai jau sudarytas dažnių skirstinys, požymio realizacijos padauginamos iš jas atitinkančių dažnių ir šios sandaugos sudedamos. Taip gauta sumos reikšmė padalijama iš išmatuotų reikšmių kiekio:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_N f_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k f_k , \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k = N .$$

Tokia pat formulė taikoma ir apskaičiuojant vidurinę suklasifikuotų dažnių skirstinio reikšmę, tik šį kartą x_k yra klasės vidurys.

Pavyzdys. Sudaryta dažnių skirstinio lentelė vidurinei reikšmei apskaičiuoti.

x_k	f_k	$x_k f_k$
1	2	2
2	5	10
3	12	36
4	9	36
5	3	15
6	1	6
	32	105

$$\bar{x} = \frac{105}{32} = 3,28.$$

Mediana (centrinė reikšmė)

Jeigu požymis turi bent vieną rangų skalę, tai jo reikšmes galima sutvarkyti pagal didumą. Vidurinioji (centrinė) reikšmė yra mediana.

Kai reikšmių skaičius N nelyginis, vidurinioji reikšmė yra $\frac{N+1}{2}$ vietoje. Kai N – lyginis, yra dvi viduriniosios reikšmės, esančios $\frac{N}{2}$ ir $\frac{N}{2}+1$ vietoje. Mediana tada lygi šių dviejų reikšmių aritmetiniam vidurkiui.

Pavyzdys. 8 testuojami asmenys atliko tą pačią užduotį. Laikas (min.), per kurį kiekvienas jų ją atliko, buvo toks: 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 49. Kadangi reikšmių kiekis lyginis, tai viduriniųjų reikšmių vietos yra $\frac{8}{2}=4(20)$ ir $\frac{8}{2}+1=5(21)$. Mediana M = 20,5. Aritmetinis vidurkis $\bar{x}$ = 23,4. Požymį „darbo laikas“ galima sutvarkyti pagal rangą, dydis $\bar{x}$ apibūdina reikšmių skirstinį prasčiau negu mediana. Taip yra todėl, kad apskaičiuojant vidurkį $\bar{x}$, jo didumui įtakos turi labai didelė reikšmė 49.

Moda

Moda yra dažniausiai pasitaikanti reikšmė dažnių skirstinyje arba statistinėje eilutėje.

17.4. Sklaidos matai

Be vidurinės reikšmės, reikia mažiausiai dar vienos charakteristikos norint pakankamai apibūdinti skirstinį. Kai dviejų skirstinių vidurinės reikšmės yra vienodos, jie dar gali skirtis „pločiu“.

Plotis

Paprasčiausias, tačiau netikslus sklaidos matas yra didžiausios ir mažiausios statistinių duomenų reikšmės skirtumas, kuris vadinamas pločiu d.

Absoliutusis nuokrypis

Kai žinoma bet kuri vidurinė skirstinio reikšmė M, galima apskaičiuoti visų realizacijų bei šios reikšmės skirtumus (nuokrypius) ir po to surasti šių skirtumų modulių aritmetinį vidurkį. Taip gautas skaičius δ vadinamas absoliučiuoju nuokrypiu nuo M. Kai $M = \bar{x}$ arba $M = Z$, teisingos tokios formulės:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|x_k - \bar{x}| \quad \text{arba} \quad \delta_Z = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|x_k - Z|.$$

Vidutinis kvadratinis nuokrypis

Ši charakteristika gerai atspindi duomenų sklaidą, todėl dažnai naudojama. Ji gaunama apskaičiuojant nuokrypių kvadratų aritmetinį vidurkį. Tai, jog nuokrypiai keliami kvadratu, turi savų privalumų: pirma, visi nuokrypiai yra teigiami, antra, didesni nuokrypiai turi ir didesnę įtaką. Vidutinis kvadratinis nuokrypis s^2 apskaičiuojamas pagal formulę:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2 f_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2 f_k.$$

Keliant kvadratu, pakeičiama požymio dimensija. Pavyzdžiui, kai dydžiai matuojami cm, jų sklaidos charakteristikos matuojamos cm^2. Norint grįžti prie ankstesnės dimensijos, sklaidos matu dažnai parenkamas dydis $\sqrt{s^2} = s$, kuris vadinamas standartiniu nuokrypiu.

Pavyzdys. Iš saldainių partijos atsitiktinai atrinkta 50 dražė ir nustatyta jų masė (g). Norint apskaičiuoti sklaidos charakteristiką, pradinė dažnių skirstinio lentelė pertvarkyta į darbinę lentelę.

Aritmetinis vidurkis $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k f_k = \frac{1}{50}\cdot 55{,}1\ \text{g} = 1{,}1\ \text{g}.$

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2 f_k = \frac{0{,}41\ \text{g}^2}{50} = 0{,}0082\ \text{g}^2.$$

Standartinis nuokrypis: $s = 0{,}091$ g.

Masė x_k	Kiekis f_k	$x_k - \overline{x}$	$(x_k - \overline{x})^2$	$(x_k - \overline{x})^2 f_k$
0,9	3	–0,2	0,04	0,12
1,0	9	–0,1	0,01	0,09
1,1	24	0	0	0
1,2	12	0,1	0,01	0,12
1,3	2	0,2	0,04	0,08
Sumos	50			0,41

17.5. Atsitiktinis eksperimentas

Apibrėžimas

Eksperimentas, kurį galima pakartoti esant toms pačioms sąlygoms ir kurio rezultato negalima iš anksto numatyti, vadinamas atsitiktiniu eksperimentu.

Yra atsitiktinių eksperimentų, kurių baigčių kiekis yra baigtinis (monetos metimas, daiktų traukimas iš dėžės), ir tokių, kurių baigčių kiekis begalinis (šaudymas į taikinį, radioaktyvusis skilimas).

Atliekamą atsitiktinį eksperimentą kiekvieną kartą atitinka tik viena galima baigtis.

Visų galimų baigčių aibė vadinama elementariųjų įvykių erdve. Ji žymima simboliu Ω. Kai šią erdvę sudaro baigtinis elementų kiekis, ją galima užrašyti taip: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$.

Pavyzdžiai. Metama moneta. Šio atsitiktinio eksperimento elementariųjų įvykių erdvė yra $\Omega = \{S, H\}$; čia S – iškrito skaičius, H – iškrito herbas.

Metamas šešiasienis idealusis lošimo kauliukas (jis dar vadinamas Laplaso kauliuku). Elementariųjų įvykių erdvė yra $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dėžėje yra vienas raudonas, vienas geltonas ir vienas mėlynas rutulys. Ištraukus vieną rutulį įmanomos trys baigtys, todėl $\Omega = \{\text{raud, gelt, mėl}\}$.

Kartotiniai atsitiktiniai eksperimentai

Kai du atsitiktiniai eksperimentai, kurių elementariųjų įvykių erdvės Ω_1 ir Ω_2, atliekami vienas po kito, turime atsitiktinį eksperimentą, kurio elementariųjų įvykių erdvė $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Aibės Ω galia (elementų skaičius) nusakoma formule: $|\Omega| = |\Omega_1 \times \Omega_2| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2|$.

Tarkime, kad n vienodų arba skirtingų atsitiktinių eksperimentų, kurių elementariųjų įvykių erdvės $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$, atlikta vienas po kito. Taip suformuluojamas atsitiktinis eksperimentas, kurio elementariųjų įvykių erdvė

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n, \quad |\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot ... \cdot |\Omega_n|.$$

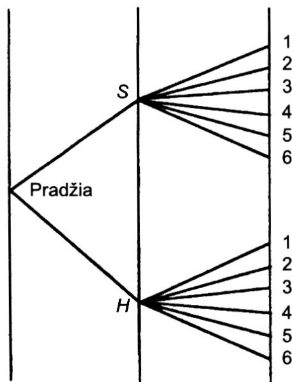
Pavyzdys. Atsitiktinį eksperimentą „metama moneta ir metamas lošimo kauliukas“ sudaro du atskiri daliniai eksperimentai: 1) dalinis eksperimentas „metama moneta“, $\Omega = \{S, H\}$ ir 2) dalinis eksperimentas „metamas lošimo kauliukas“, $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Kartotinio atsitiktinio eksperimento elementariųjų įvykių erdvė $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{S1, ... S6, H1, ..., H6\}$.

Šakotinė diagrama

Aibės Ω elementus galima grafiškai pavaizduoti šakotine diagrama. Tokia diagrama braižoma taip.

Juostos. Kiekvienas dalinis eksperimentas pavaizduojamas vertikaliąja juosta.

Šakos. Juostoje esanti atkarpa vadinama šaka. Jomis pavaizduojami dalinio eksperimento rezultatai.



Takai. Kiekvienas kelias, jungiantis šakotinės diagramos pradžios ir galo taškus, vadinamas taku. Takas baigiasi bendrojo eksperimento rezultatu, taigi erdvės Ω elementu.

Pavyzdys. Metama moneta ir lošimo kauliukas. Eksperimentą sudaro du daliniai eksperimentai (brėžinys p. 335).

Šakotinę diagramą nesunku nubrėžti, kol eksperimentų skaičius neviršija $n = 5$. Šakotinės diagramos yra vaizdi pagalbinė priemonė analizuojant atsitiktinius eksperimentus ir skaičiuojant tikimybes.

Urnų modelis

Dėžėje yra n skirtingai pažymėtų rutulių. Ištraukus iš dėžės vieną po kito du rutulius, toliau galima pasielgti dvejopai.

Grąžinamoji atranka. Iš dėžės ištraukiamas pirmas rutulys, užfiksuojamas jo požymis ir rutulys grąžinamas į dėžę. Po to ištraukiamas antras rutulys. Abu daliniai eksperimentai yra nepriklausomi. Bendras eksperimentas turi n^2 rezultatų: $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| = n \cdot n = n^2$.

Negrąžinamoji atranka. Iš dėžės ištraukiamas pirmas rutulys ir atgal į dėžę negrąžinamas. Po to ištraukiamas antras rutulys. Daliniai eksperimentai yra priklausomi vienas nuo kito. Bendras eksperimentas turi $n(n-1)$ rezultatų: $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| = n(n-1)$.

Tiek grąžinamąją, tiek ir negrąžinamąją atranką galima apibendrinti ir didesniam traukimų skaičiui nei du.

17.6. Įvykiai

Apibrėžimas

Kol dar neatliktas atsitiktinis eksperimentas, galima tikėtis įvairios jo baigties. Toks tikėtinumas nusakomas arba aibe (aibės Ω poaibis), arba žodžiais, formuluojant teiginį. Kalbama apie įvykį.

Kai Ω yra atsitiktinio eksperimento elementariųjų įvykių erdvė, tai kiekvienas Ω poaibis vadinamas įvykiu.

Vienelemenčius Ω poaibius sudaro elementarieji įvykiai.

Pavyzdys. Atsitiktinis eksperimentas – lošimo kauliuko metimas.
Elementariųjų įvykių erdvė: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Elementarusis įvykis: pvz., $\{3\}$.
Bet koks įvykis, apibūdintas aibe $E = \{2, 4, 6\}$ arba teiginiu E: „Įvykis – iškrito lyginis akučių skaičius."

Įvykių sankirta

Kai E_1 ir E_2 yra du atsitiktinio eksperimento įvykiai, tai $E_1 \cap E_2$ yra šio eksperimento įvykis, vadinamas įvykių E_1 ir E_2 sankirta. $E_1 \cap E_2$ reiškia, kad įvykiai E_1 ir E_2 įvyksta kartu.

Įvykių sąjunga

Kai E_1 ir E_2 yra du atsitiktinio eksperimento įvykiai, tai $E_1 \cup E_2$ irgi yra šio eksperimento įvykis, vadinamas įvykių E_1 ir E_2 sąjunga. $E_1 \cup E_2$ reiškia, kad įvyksta arba įvykis A, arba įvykis B, arba abu kartu.

Nesutaikomieji įvykiai

Kai dviejų atsitiktinio eksperimento įvykių E_1 ir E_2 sankirta $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, E_1 ir E_2 vadinami nesutaikomaisiais įvykiais.

Pavyzdys. Lošimo kauliuko metimas: $E_1 = \{1, 2\}$, $E_2 = \{4, 5, 6\}$.
$E_1 \cap E_2 = \varnothing$, taigi E_1 ir E_2 yra nesutaikomieji įvykiai.

Papildomieji įvykiai

Du elementariosios įvykių erdvės Ω įvykiai E ir $\bar{E}$ vadinami papildomaisiais Ω atžvilgiu, kai $E \cup \bar{E} = \Omega$ ir $E \cap \bar{E} = \varnothing$. Kai $E = \varnothing$, tai $\bar{E} = \Omega$.

De Morgano taisyklės

Kai E_1 ir E_2 yra elementariųjų įvykių erdvės Ω įvykiai, juos sieja sąryšiai:

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \quad \text{ir} \quad \overline{E_1 \cap E_2} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2.$$

17.7. Dažnis

Tarkime, kad tam tikras atsitiktinis eksperimentas pakartotas n kartų tomis pačiomis sąlygomis. Jeigu įvykis E įvyko f_E kartų, tai f_E vadinamas absoliučiuoju įvykio E dažniu. Santykis $h_E = \frac{f_E}{n}$ vadinamas santykiniu įvykio E dažniu.

Pavyzdys. Lošimo kauliukas mestas 50 kartų. Įvykis E_1 „iškrito 6 akutės“ įvyko 7 kartus. Taigi $f_1 = 7$, santykinis dažnis $h_1 = \frac{7}{50} = 0,14$.
Įvykis E_2 „iškrito mažiausiai 4 akutės“ įvyko 26 kartus. Vadinasi, absoliutusis E_2 dažnis $f_2 = 26$ ir santykinis dažnis $h_2 = \frac{26}{50} = 0,52$.

17.8. Tikimybė

Apibrėžimas

Įvykio E tikimybė $\mathbf{P}(E)$ yra skaičiumi išreikštas „šansas“, jog įvykis įvyks. Šie skaičiai priklauso uždarajam intervalui $0 \le \mathbf{P}(E) \le 1$.

Būtinojo įvykio tikimybė $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, negalimojo įvykio tikimybė $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$. Kuo skaičius $\mathbf{P}(E)$ yra artimesnis 1, tuo labiau tikėtina, jog įvyks įvykis E. Kuo skaičius $\mathbf{P}(E)$ artimesnis 0, tuo labiau yra negalimas įvykis E.

Kai E ir $\bar{E}$ yra papildomieji įvykiai, tai $\mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(\bar{E}) = 1$.

Laplaso taisyklė

Tarkime, kad elementariųjų įvykių erdvę sudaro $|\Omega| = n$ vienodai tikėtinų elementariųjų įvykių (turime reikalą su vadinamuoju Laplaso eksperimentu), o įvykis $E \subset \Omega$ susideda iš $|E| = m$ šių elementariųjų įvykių. Tada įvykio E tikimybė apibrėžiama taip:

Laplaso taisyklė $$\mathbf{P}(E)=\frac{|E|}{|\Omega|}=\frac{m}{n}.$$

Pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$E=\{1, 6\}\Rightarrow|E|=2,\ \mathbf{P}(E)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0,3333.$$

Mizeso taisyklė

Tarkime, kad tam tikro atsitiktinio eksperimento elementarieji įvykiai nėra vienodai tikėtini. Tada įvykio tikimybę galima apibūdinti pasinaudojant prieš tai įgyvendinta bandymų serija („iš patirties žinoma“). Bandymų serijos rezultatai pavaizduojami dažnių skirstiniu ir apskaičiuojamas santykinis įvykio dažnis h_E.

Teisingas sąryšis $h_E \to \mathbf{P}(E)$, ir kuo didesnis yra skaičius n, tuo tiksliau įgyvendinamas šis sąryšis (Mizeso taisyklė).

Sudėties teoremos

Kai E_1 ir E_2 yra du nesutaikomieji atsitiktinio eksperimento įvykiai, tai $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2)=\mathbf{P}(E_1)+\mathbf{P}(E_2)$.

Kai E_1, E_2, E_3, ..., E_n yra kas du nesutaikomi įvykiai, tai $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)=\mathbf{P}(E_1)+\mathbf{P}(E_2)+...+\mathbf{P}(E_n)$.

Jeigu E_1 ir E_2 yra sutaikomieji įvykiai, tai

$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2)=\mathbf{P}(E_1)+\mathbf{P}(E_2)-\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$ arba

$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2)=\mathbf{P}(E_1 \setminus E_2)+\mathbf{P}(E_2 \setminus E_1)+\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$.

Pavyzdys. Iš n natūraliųjų skaičių nuo 5 iki 15 atsitiktinai išrenkamas vienas skaičius. Reikia rasti tikimybę, kad išrinktas skaičius yra nelyginis (E_1) arba dalus iš 3 (E_2).

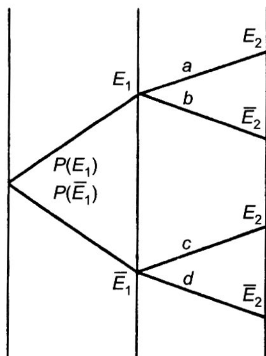
$$E_1=\{5, 7, 9, 11, 13, 15\}\Rightarrow \mathbf{P}(E_1)=\frac{6}{11}=0,5454,$$

$$E_2=\{6, 9, 12, 15\}\Rightarrow \mathbf{P}(E_2)=\frac{4}{11}=0,3636,$$

$$E_1 \cap E_2=\{9, 15\}\Rightarrow \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)=\frac{2}{11}=0,1818;$$

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2)=\frac{6}{11}+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{8}{11}=0,7272.$$

Sąlyginės tikimybės



Tarkime, kad atsitiktinis eksperimentas gaunamas sujungiant du dalinius eksperimentus (stochastinis procesas). Pirmąjį dalinį eksperimentą atitinka rezultatai E_1 ir $\bar{E}_1$, antrąjį – E_2 ir $\bar{E}_2$.

Šakų, esančių antroje juostoje, tikimybės priklauso nuo „priešistorės" pirmoje juostoje. Todėl jos vadinamos sąlyginėmis tikimybėmis.

$a = \mathbf{P}_{E_1}(E_2)$ – įvykio E_2 tikimybė, apskaičiuota po to, kai įvykis E_1 jau įvyko. $b = \mathbf{P}_{E_1}(\bar{E}_2)$ – įvykio $\bar{E}_2$ tikimybė, apskaičiuota po to, kai įvykis E_1 jau įvyko. Analogiškai kitas dvi šakas atitinka tikimybės: $c = \mathbf{P}_{\bar{E}_1}(E_2)$ ir $d = \mathbf{P}_{\bar{E}_1}(\bar{E}_2)$.

Kai abu įvykiai E_1 ir E_2 yra nepriklausomi vienas nuo kito, atsižvelgti į tai, ar vienas jų jau įvyko, ar ne, nereikia. Tada, pavyzdžiui, $a = \mathbf{P}_{E_1}(E_2) = \mathbf{P}(E_2)$.

Daugybos teorema

E_1 ir E_2 yra stochastiškai priklausomi: $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}_{E_1}(E_2)$. E_1 ir E_2 yra stochastiškai nepriklausomi $(\mathbf{P}_{E_1}(E_2) = \mathbf{P}(E_2))$: $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2)$.

Daugybos teoremą galima apibendrinti ir tam atvejui, kai yra daugiau nei du daliniai eksperimentai, ir tam atvejui, kai daliniam eksperimentui būdingi daugiau nei du įvykiai.

Teorema, atvirkštinė daugybos teoremai, taikoma norint įrodyti dviejų įvykių nepriklausomumą. Tarkime, atsitiktinio eksperimento elementariųjų įvykių erdvė yra Ω. Du įvykiai $E_1, E_2 \subset \Omega$ yra stochastiškai nepriklausomi, kai $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2)$.

Pavyzdys. Dėžėje yra 3 rutuliai, ant kurių užrašyti skaičiai nuo 1 iki 3. Atsitiktinis eksperimentas yra toks: du kartus traukiama po vieną rutulį su grąžinimu.

Ω {(11), (12), (13), (21), (22), (23), (31), (32), (33)}.

E_1: „Pirmasis ištrauktas rutulys pažymėtas nelyginiu skaičiumi."

{(11), (12), (13), (31), (32), (33)}.

E_2: „Antrasis ištrauktas rutulys pažymėtas skaičiumi 2."

{(12), (22), (32)}.

$E_1 \cap E_2 = \{(12), (32)\}$.

Apskaičiuojamos tikimybės:

$\mathbf{P}(E_1) = \frac{6}{9}$, $\mathbf{P}(E_2) = \frac{3}{9}$, $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{9}$.

Daugybos teorema: $\frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{9}$ (teisingas teiginys), taigi E_1 ir E_2 yra nepriklausomi vienas nuo kito. Iš to išplaukia, kad informacija apie įvykį E_1 nei padeda, nei kliudo nuspėti, įvyks ar neįvyks įvykis E_2, nes jie yra nepriklausomieji.

Bejeso teorema

Kai E ir $\bar{E}$ yra Ω skaidinys, sąlyginė tikimybė $\mathbf{P}_B(E)$ apskaičiuojama pagal formulę:

$$\mathbf{P}_B(E) = \frac{\mathbf{P}_E(B) \cdot \mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}_E(B) \cdot \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}_{\bar{E}}(B) \cdot \mathbf{P}(\bar{E})}.$$

17.9. Kombinatorika

Kombinatorinė daugybos taisyklė

Kai proceso vyksmą sudaro n žingsnių, kurių pirmasis gali būti žengtas k_1 skirtingų būdų, ..., n-tasis – k_n skirtingų būdų, tai proceso vyksmas gali būti realizuotas $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$ skirtingų būdų.

Pavyzdys. Kiek triženklių skaičių galima užrašyti skaitmenimis 0, 1, 2, ..., 9, jei nė vienas skaičiaus skaitmuo nesikartoja? Pirmąjį skaitmenį galima parinkti 9 būdais (0 netinka). Antrąjį skaitmenį galima parinkti 9 būdais (vienas skait-

muo iš 10 skaitmenų jau panaudotas).
Trečiąjį skaitmenį galima parinkti 8 būdais.
Vadinasi, iš viso bus sudaryti $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ skaičiai.

k ilgio rinkinys

kai n elementų (iš n-elementės aibės) surašomi tam tikra tvarka ir elementai gali kartotis, tai gaunamas k ilgio rinkinys (k – kortežas).

Pavyzdys: (a, b, b, m, n, y, y, z) yra rinkinys, sudarytas iš mūsų abėcėlės raidžių, jo ilgis 8.

Kėliniai

Tarkime, nurodyta n-elementė aibė. n-elemenčiai rinkiniai su pasikartojimais, sudaryti iš n-elementės aibės elementų, vadinami kėliniais su pasikartojimais. Jų skaičius $\bar{P}^*(n)$ apskaičiuojamas pagal formulę: $\bar{P}(n) = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{n \text{ kartų}} = n^n$.

Pavyzdys. Dėžėje yra 3 rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 3. Ištraukiami trys rutuliai su grąžinimu. Vadinasi, iš viso yra $|\Omega| = \bar{P}(3) = 3^3 = 27$ galimybės.

Tarkime, nurodyta n-elementė aibė. n-elemenčiai rinkiniai be pasikartojimų, sudaryti iš n-elementės aibės elementų, vadinami kėliniais be pasikartojimų. Jų skaičius apskaičiuojamas pagal formulę $P(n) = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Faktorialas

Natūraliųjų skaičių sandauga $n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ vadinama faktorialu ir trumpai žymima $n!$. Be to, $1! = 1$ ir $0! = 1$. Teisinga rekurentinė formulė $n! = n(n-1)!$.

Pavyzdžiai: $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.
Dėžėje yra 8 rutuliai, sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 8. Rutuliai, negrąžinant jų atgal, ištraukiami vienas po kito. Elementariųjų įvykių erdvės galia $|\Omega| = P(8) = 8! = 40320$.

* Raidė P yra pirmoji prancūzų kalbos žodžio *permutation* – „perkėlimas“ – raidė; brūkšnys rodo, kad elementai gali kartotis (*vertėjo pastaba*).

Gretiniai

Tarkime, nurodyta n-elementė aibė. Rinkiniai, sudaryti iš šios aibės k elementų $(k \le n)$ su pasikartojimais, vadinami gretiniais su pasikartojimais iš n elementų po k. Jų skaičius $\overline{A}_n^k$ * apskaičiuojamas pagal formulę $\overline{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k \text{ kartų}} = n^k$.

Pavyzdys. Iš dėžės, kurioje yra 7 sunumeruoti rutuliai, vienas po kito ištraukiami 3 rutuliai, grąžinant kiekvieną atgal po jo ištraukimo. Elementariųjų įvykių erdvės galia $|\Omega| = \overline{A}_7^3 = 7^3 = 343$.

Tarkime, nurodyta n-elementė aibė. Rinkiniai, sudaryti iš šios aibės k elementų $(k \le n)$ be pasikartojimų, vadinami gretiniais be pasikartojimų iš n elementų po k. Jų skaičius A_n^k apskaičiuojamas pagal formulę $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Kai $k = n$, tai $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = \mathbf{P}(n)$.

Pavyzdys. Dėžėje yra 7 sunumeruoti rutuliai. Trys rutuliai, negrąžinant jų atgal, ištraukiami vienas po kito. Elementariųjų įvykių erdvės galia $|\Omega| = A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$.

Deriniai

k-elementis poaibis yra k ilgio rinkinys, kurio elementai negali kartotis ir kuriame neatsižvelgiama į elementų išrinkimo tvarką.

Tarkime, nurodyta n-elementė aibė. Šios aibės k-elemenčiai poaibiai vadinami deriniais. Galimų derinių skaičius žymimas C_n^k ** arba $\binom{n}{k}$ (skaitoma „iš n po k") ir apskaičiuojamas pagal formulę

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

* Raidė A yra pirmoji prancūzų kalbos žodžio *arrangement* – „sutvarkymas" – raidė; brūkšnys rodo, kad elementai gali kartotis (*vertėjo pastaba*).

** Raidė C yra pirmoji prancūzų kalbos žodžio *combination* – „derinimas" – raidė (*vertėjo pastaba*).

Kai elementai gali kartotis, tai derinių su pasikartojimais skaičius apskaičiuojamas pagal formulę

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Pavyzdys. Dėžėje yra 30 sunumeruotų rutulių. Reikia negrąžinant atgal ištraukti vieną po kito šešis rutulius. Rutulių ištraukimo eilė nesvarbi. Elementariųjų įvykių erdvės galia yra tokia:

$$C_{30}^6 = \frac{30!}{(30-6)! \cdot 6!} = 593\,775,$$

$$\bar{C}_{30}^6 = C_{30+6-1}^6 = C_{35}^6 = 1\,623\,160.$$

Kai n-elementų rinkinį sudaro k skirtingų elementų, kurių kiekvienas pasikartoja n_1, n_2, ..., n_k kartų (čia $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), tai tokios rūšies skirtingų rinkinių galima sudaryti iš viso $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$.

17.10. Tikimybių skirstinys

Atsitiktiniai dydžiai

Funkcija X, kuri kiekvienam elementariųjų įvykių erdvės Ω rezultatui ω (tiksliau, kiekvienam elementariajam įvykiui) priskiria realųjį skaičių, vadinama atsitiktiniu dydžiu X.

Pasinaudojant atsitiktinio dydžio sąvoka, galima elementarųjį įvykį pavaizduoti skaičiumi. Kartu galima elementariuosius įvykius išmatuoti, taigi pavaizduoti koordinačių sistemoje. Atitiktis nustatoma ne savavališkai, ją apibrėžia uždavinio formuluotė. Atsitiktiniam dydžiui priskirti skaičiai vadinami atsitiktinio dydžio reikšmėmis arba realizacijomis. Sąlyga $(X = x)$ apibūdina apibrėžtą įvykį. Sąlyga $(X \leq x)$ apibūdina tuos įvykius, su kuriais atsitiktinių dydžių reikšmės yra mažesnės arba lygios realiajam skaičiui x. Sąlyga $(X > x)$ apibūdina tuos įvykius, su kuriais atsitiktinių dydžių reikšmės yra didesnės už realųjį skaičių x.

Pavyzdys. Dėžėje yra vienas baltas, vienas raudonas ir vienas juodas rutulys. Atsitiktinai ištraukiami vienas po kito du rutuliai, prieš tai grąžinant pirmąjį ištrauktą rutulį atgal. Jei ištraukti du juodi rutuliai, laimėta 4 €, jei ištraukti du balti arba du raudoni rutuliai, laimėta po 2 €, jei tarp ištrauktųjų rutulių yra tiksliai vienas baltas rutulys, pralaimėta 3 €. Elementariųjų įvykių erdvė $\Omega = \{jj, jr, jb, rj, rr, rb, bj, br, bb\}$, pažymėjus $\omega_1 = \{jj\}$, $\omega_2 = \{rr, bb\}$, $\omega_3 = \{jb, rb, bj, br\}$, $\omega_4 = \{jr, rj\}$, pakeičiama jos stambiniu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Išmokų planas apibūdina atsitiktinį dydį X.

Rezultatas	X	**P**
ω_1	4	$\frac{1}{9}$
ω_2	2	$\frac{2}{9}$
ω_3	–3	$\frac{4}{9}$
ω_4	0	$\frac{2}{9}$

Priskyrus kiekvienai atsitiktinio dydžio X realizacijai tikimybės reikšmę, gaunama funkcija, kuri vadinama dydžio x tikimybių skirstiniu $x_i \to \mathbf{P}(X = x_i)$. Visų tikimybių skirstinio tikimybių suma lygi 1.

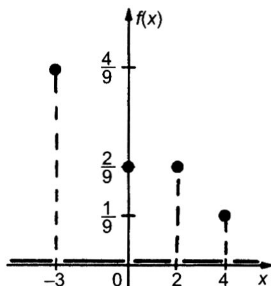
Tikimybių funkcija (tikimybių skirstinys)

Funkcija $f(x)$, kuri kiekvienam realiajam skaičiui $x \in \boldsymbol{R}$ priskiria tikimybę $\mathbf{P}(X = x)$, vadinama atsitiktinio dydžio X tikimybių funkcija arba tiesiog tikimybių skirstiniu. Ši funkcija tik atskiruose taškuose x_i nelygi nuliui (i = 1, 2, 3, ...).

Pavyzdys: (tęsinys)

x	–3	0	2	4	kitur
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

Šio tikimybių skirstinio grafiką sudaro keturi taškai ir atskiros ašies Ox atkarpos.
Tikimybių skirstinys formaliai panašus į dažnių skirstinį, nagrinėtą aprašomojoje statistikoje.



Pasiskirstymo funkcija

Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis, kurio realizacijos sudaro aibę $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Funkcija $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \sum\limits_{x_i \leq x} \mathbf{P}(X = x_i)$, apibrėžta su visais $x \in \boldsymbol{R}$, yra dydžio X pasiskirstymo funkcija.

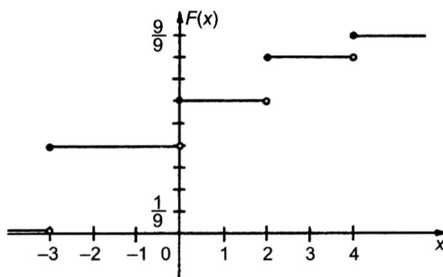
Bet kurios pasiskirstymo funkcijos reikšmių aibė yra $[0; 1]$. Kiekviena pasiskirstymo funkcija yra monotoniškai didėjanti. Tikimybės kumuliatyviai (sukaupiant) sumuojamos skaičių ašies kryptimi. Į kairę nuo mažiausios realizacijos funkcijos reikšmė lygi 0, į dešinę nuo didžiausios realizacijos funkcijos reikšmė lygi 1. $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Pasiskirstymo funkcija formaliai panaši į sumos pasiskirstymą, nagrinėtą aprašomojoje statistikoje.

Pavyzdys: (tęsinys)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \in (-\infty; -3), \\ \frac{4}{9}, & \text{kai } x \in [-3; 0), \\ \frac{6}{9}, & \text{kai } x \in [0; 2), \\ \frac{8}{9}, & \text{kai } x \in [2; 4), \\ 1, & \text{kai } x \in [4; +\infty). \end{cases}$$

$F(x)$ yra atskirose atkarpose apibrėžta funkcija. Taškai, atskiriantys atkarpas, yra atsitiktinio dydžio realizacijos.

Šios pasiskirstymo funkcijos grafikas yra laiptuota kreivė.



17.11. Skirstinio parametrai

Matematinė viltis

> Tarkime, kad atsitiktinio dydžio X realizacijos sudaro aibę $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Taip pat žinomos realizacijų tikimybės. Atsitiktinio dydžio X matematine viltimi vadinamas skaičius (parametras)
>
> $$\mathbf{E}X = x_1 \cdot \mathbf{P}(X = x_1) + x_2 \cdot \mathbf{P}(X = x_2) + ... + x_k \cdot \mathbf{P}(X = x_k) =$$
>
> $$= \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i).$$

Matematinė viltis dar žymima graikiška raide μ. Matematinė viltis yra realizacijų svertinis aritmetinis vidurkis, apskaičiuotas tikimybes laikant realizacijų svoriais. Skaičius $\mathbf{E}X$ yra arčiausiai tos realizacijos, kurios tikimybė didžiausia. $\mathbf{E}X$ yra skirstinio parametras.

Matematinės vilties savybės:

> $\mathbf{E}X = a$, kai $X(\omega) = a$;
>
> $\mathbf{E}(cX) = c \cdot \mathbf{E}X$;
>
> $\mathbf{E}(X_1 + X_2) = \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_2$.

Dispersija

> Tarkime, kad atsitiktinio dydžio realizacijos sudaro aibę $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ir matematinė viltis lygi μ. Teigiamasis skaičius $\mathbf{D}X = \mathbf{E}\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2 \cdot \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$ vadinamas atsitiktinio dydžio X dispersija.

Kvadratinė šaknis iš X dispersijos, taigi skaičius $\sqrt{\mathbf{D}X}$, vadinamas standartu.

Dispersija ir standartas dar žymimi graikiškomis raidėmis $\mathbf{D}X = \sigma^2$, $\sqrt{\mathbf{D}X} = \sigma$.

Dispersija yra realizacijų nuokrypio nuo matematinės vilties matas, toks pat yra ir standartas.

Dispersija yra realizacijų kvadratinių nuokrypių nuo matematinės vilties svertinis aritmetinis vidurkis, apskaičiuotas tikimybes laikant realizacijų svoriais.

Dispersija ir standartas yra tikimybių skirstinio parametrai. Dispersiją galima palyginti su vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu, apibrėžtu aprašomojoje statistikoje.

Dispersijos savybės:

> $\mathbf{D}(X+a) = \mathbf{D}X$;
>
> $\mathbf{D}(aX) = a^2 \cdot \mathbf{D}X$;
>
> $\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_i$, kai X_i yra poromis nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Pavyzdys. Gautas toks atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys (1-asis ir 2-asis lentelės stulpeliai). 3-asis stulpelis skirtas matematinei vilčiai $\mathbf{E}X$, o 4-asis ir 5-asis stulpeliai – dydžiui $\mathbf{E}X^2$ apskaičiuoti.

$\mathbf{E}X = 7{,}3$, $(\mathbf{E}X)^2 = 53{,}3$,

$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 217 - 53{,}3 = 163{,}7$,

$\sigma = \sqrt{163{,}7} = 12{,}8$.

x_k	f_k	$x_k f_k$	x_k^2	$x_k^2 f_k$
0	0,54	0	0	0
10	0,36	3,6	100	36
30	0,09	2,7	900	81
100	0,01	1,0	10 000	100
		7,3		217

Čebyšovo nelygybė

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}.$$

Toks įvertis teisingas bet kokiam skirstiniui, kai $\varepsilon > 0$.

Pavyzdys: Atsitiktinio dydžio X skirstinys nežinomas, $\mathbf{E}X = 10$ ir $\mathbf{D}X = 5{,}5$.

$$\mathbf{P}(|X - 10| \geq 8) = \mathbf{P}(2 \leq X \leq 18) \leq \frac{5{,}5}{64} = 0{,}086.$$

Atsitiktinių dydžių standartizavimas

Atsitiktinis dydis Z vadinamas standartizuotu, kai jo matematinė viltis $\mathbf{E}Z = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}Z = 1$.

Kai atsitiktinio dydžio X matematinė viltis $\mathbf{E}X = \mu$ ir dispersija $\mathbf{D}X = \sigma_x^2$, jis standartizuojamas taip:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_X}.$$

Kovariacija ir koreliacija

Kovariacija yra dviejų atsitiktinių dydžių X ir Y stochastinio priklausomumo įvertis. Ji yra realusis skaičius, apibrėžiamas formule

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y.$$

Normuota kovariacija vadinama koreliacijos koeficientu.

Koreliacijos koeficientas: $\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X} \cdot \sqrt{\mathbf{D}Y}}.$

Koreliacijos koeficientas kinta intervale [–1; 1].

17.12. Binominis skirstinys

Bernulio eksperimentu vadinamas atsitiktinis eksperimentas, turintis dvi baigtis (laimėjimas – L, tuščias bilietas – T), kurių tikimybės $\mathbf{P}(L) = p$, $\mathbf{P}(T) = q$, $p + q = 1$.

Seka, sudaryta iš n nepriklausomų Bernulio eksperimentų, kurių kiekvieno pasirodymo tikimybė p, vadinama Bernulio schema su parametrais p ir n. Dydis n yra Bernulio schemos ilgis.

Pavyzdys. Dešimt kartų metama moneta. Turime Bernulio schemą su $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$ ir $n = 10$.

Tiksliai *k* laimėjimų

Tikimybė, jog atlikus n Bernulio eksperimentų bus laimėta k kartų, žymima $B(n; p; k)$ ir apskaičiuojama taip: $B(n; p; k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra baigčių L skaičius, būdingas n ilgio Bernulio schemai. Realizacijos x_i įgyja reikšmes: $x_i = 0, 1, ..., n$.

Atsitiktinio dydžio X skirstinys, atitinkantis šią Bernulio schemą, vadinamas binominiu skirstiniu:

$$\mathbf{P}(X = x) = f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, ..., n.$$

Knygose pateikiamos $B(n; p; k)$ reikšmių, apskaičiuotų su dažnai naudojamomis parametrų reikšmėmis, lentelės.

Kai dydžio X skirstinys yra binominis, galima lengvai apskaičiuoti matematinę viltį ir dispersiją: $\mathbf{E}X = np$, $\mathbf{D}X = np(1-p)$.

Daugiausiai *k* laimėjimų

Tikimybė, jog atlikus n Bernulio eksperimentų bus laimėta daugiausiai k kartų, yra dydžio X pasiskirstymo funkcijos reikšmė $F_{n;\,p}(k)$, apskaičiuota, kai $X = k$:

$$\mathbf{P}(X \le k) = f(0) + f(1) + \dots + f(k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;\ p;\ i).$$

Mažiausiai *k* laimėjimų

Tikimybė, jog atlikus *n* Bernulio eksperimentų bus laimėta mažiausiai *k* kartų, yra reikšmė $1 - F_{n;\,p}(k)$:

$$\mathbf{P}(X \ge k) = f(k) + f(k+1) + \dots + f(n) = \sum_{i=k}^{n} B(n;\ p;\ i).$$

Skirstinio funkcijos $\mathrm{F}_{n;\,p}(k-1)$ reikšmes galima rasti lentelėse pagal parametrus *n* ir *p*.

Mažiausiai *k* ir daugiausiai *m* laimėjimų

Tikimybė, jog atlikus *n* Bernulio eksperimentų bus laimėta mažiausiai *k* ir daugiausiai *m* kartų, lygi dydžio *X* pasiskirstymo funkcijos reikšmių skirtumui $\mathrm{F}_{n;\,p}(m) - \mathrm{F}_{n;\,p}(k-1)$:

$$\mathbf{P}(k \le X \le m) = f(k) + f(k+1) + \dots + f(m) = \sum_{i=k}^{m} B(n;\ p;\ i).$$

Pavyzdys. Dėžėje yra keturi raudoni ir šeši juodi rutuliai. Vienas po kito ištraukiama 10 rutulių, prieš tai grąžinant į dėžę kiekvieną ištrauktą rutulį. Atsitiktinis dydis *X* yra ištrauktų raudonų rutulių kiekis: $p = \frac{4}{10} = 0{,}4,\ q = \frac{6}{10} = 0{,}6.$
Tikimybę, jog tarp 10 ištrauktų rutulių yra tiksliai 6 raudoni, galima surasti iš lentelės: $\mathbf{P}(X = 6) = f(6) = $ $= B(10;\ 0{,}4;\ 6) = 0{,}1115$ arba apskaičiuojant:
$B(10;\ 0{,}4;\ 6) = C_{10}^{6} \cdot 0{,}4^{6} \cdot 0{,}6^{4} = 0{,}1115.$
Tikimybė, jog tarp ištrauktų rutulių daugiausiai 6 raudoni rutuliai, tokia:
$\mathbf{P}(X \le 6) = F_{10;\,0,4}(6) = 0{,}9452$ (iš lentelės).
Tikimybė, jog tarp ištrauktų rutulių mažiausiai 6 raudoni rutuliai, tokia:
$\mathbf{P}(X \ge 6) = 1 - F_{10;\,0,4}(5) = 1 - 0{,}8338 = 0{,}1662.$
Tikimybė, jog tarp ištrauktų rutulių mažiausiai 3, bet ne daugiau nei 7 raudoni rutuliai, tokia: $\mathbf{P}(3 \le X \le 7) = $
$= F_{10;\,0,4}(7) - F_{10;\,0,4}(2) = 0{,}9877 - 0{,}1673 = 0{,}8204.$

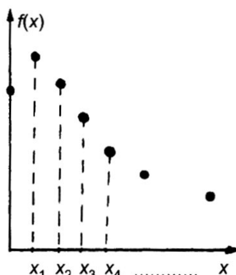
17.13. Puasono skirstinys

Kai p reikšmės yra mažos, o n reikšmės labai didelės ($n \to +\infty$), binominis skirstinys išsigimsta į Puasono skirstinį. Matematinė viltis tada yra $\mathbf{E}X = \mu = np$, dispersija lygi matematinei vilčiai: $\mathbf{D}X = \mathbf{E}X = \mu = np$.

Kai atsitiktinio dydžio X skirstinys yra Puasono skirstinys, tada teisinga formulė:

$$\mathbf{P}(X = x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, & x \in N, \\ 0, & \text{kitur}; \end{cases}$$

skirstinio parametras $\mu = np$.



Pavyzdys. Tikimybė, kad vienas iš trijų skato lošėjų į rankas gaus visus keturis valetus, yra p = 0,0175. Kokia tikimybė, jog šis įvykis įvyks mažiausiai vieną kartą lošiant 100 partijų? Parametrų reikšmės n = 100 ir p = 0,0175 pateisina binominio skirstinio pakeitimą Puasono skirstiniu, kurio parametras $\mu = 100 \cdot 0{,}0175 = 1{,}75$.

$$\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \frac{1{,}75^0 \cdot e^{-1{,}75}}{0!} =$$

$$= 1 - e^{-1{,}75} = 1 - 0{,}1738 = 0{,}8262.$$

Puasono skirstinio lentelėje nėra reikšmės μ = 1,75. Reikia interpoliuoti tarp reikšmių 1,7 ir 1,8.

17.14. Normalusis skirstinys

Normalusis skirstinys ypač būdingas požymiams iš generalinių aibių, nagrinėjamų medicinoje, biologijoje, psichologijoje, fizikoje, socialiniuose ir gamtos moksluose. Štai žmonių, gyvūnų ir augalų matmenys yra beveik tiksliai normaliai pasiskirstę kaip ir raudonųjų kraujo kūnelių kiekis arba intelekto koeficientas.

Fizikoje normaliai pasiskirsčiusios yra matavimo paklaidos, svyravimų amplitudės arba atominių dalelių dydžiai.

Išvardytose srityse susiduriama su tokiais atsitiktiniais dydžiais, kurie tam tikroje skaičių ašies srityje įgyja visas reikšmes. Jie vadinami tolydžiaisias atsitiktiniais dydžiais ir atitinka kiekybinius požymius, nagrinėtus aprašomojoje statistikoje. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio tikimybių funkcija dar vadinama tankio funkcija. Pasiskirstymo funkcija yra tankio funkcijos pirmykštė funkcija.

Tolydusis atsitiktinis dydis vadinamas normaliai pasiskirsčiusiu, kai jo tankio funkcija tokia:

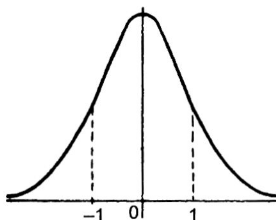
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Matematinė viltis $\mathbf{E}X=\mu$, *dispersija* $\mathbf{D}X=\sigma^2$.

Kai tolydusis atsitiktinis dydis pertvarkomas pagal formulę $U=\frac{X-\mu}{\sigma}$, gaunamas standartinis normalusis skirstinys $\varphi(u)$, kurio pasiskirstymo funkcija $\Phi(u)$:

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2},$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t.$$



Sudarytos abiejų funkcijų reikšmių lentelės, kai $u\geq 0$. Be to, $\Phi(-u)=1-\Phi(u)$.

Pavyzdys. X yra normalusis atsitiktinis dydis, kurio parametrai μ = 150, σ = 22.

$$\mathbf{P}(X\leq 190)=F(190)=\Phi\left(\frac{190-150}{22}\right)=\Phi(1,8)=0,9641$$

(iš lentelės),

$$\mathbf{P}(X\leq 102)=\Phi\left(\frac{102-150}{22}\right)=\Phi(-2,182)=1-\Phi(2,182)=$$

$$=1-0,9855=0,0145,$$

$$\mathbf{P}(X \geq 130) = 1 - F(130) = 1 - \Phi\left(\frac{130-150}{22}\right) =$$

$= 1 - \Phi(-0,909) = \Phi(0,909) = 0,8183$ (pasinaudota interpoliavimu),

$$\mathbf{P}(177,5 \leq X \leq 192,9) = \Phi\left(\frac{192,9-150}{22}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{177,5-150}{22}\right) =$$

$$= \Phi(1,95) - \Phi(1,25) = 0,9744 - 0,8944 = 0,08.$$

Atsitiktinio dydžio X binominį skirstinį $B(n;p)$, kai realizacijų skaičius n yra didelis (paprastai kai $n > 30$), galima apytiksliai pakeisti tolydžiuoju normaliuoju skirstiniu $N\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$. Pakeitus šį skirstinį standartiniu normaliuoju skirstiniu, gaunama tokia formulė:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} C_n^x \cdot p^x (1-p)^{n-x} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{b+0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Neįmanoma diskretųjį skirstinį tiksliai aproksimuoti tolydžiuoju skirstiniu. Tai galima padaryti tik apytiksliai, nes atskiras binominio skirstinio tikimybes reikia paversti normaliojo skirstinio tikimybėmis, atitinkančiomis įvykį $k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5$.

Pavyzdys. Moneta mesta 600 kartų. Atsitiktinis dydis X yra binominis dydis $B(600;\ 0,5)$, kurio $\mathbf{E}X = 600 \cdot 0,5 = 300$ ir $\sqrt{\mathbf{D}X} = 12,25$.

$$\mathbf{P}(X \leq 350) = \sum_{i=0}^{350} B(600;\ 0,5;\ i) = F(350) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{350+0,5-300}{12,25}\right) = \Phi(4,12) = 0,99998,$$

$$\mathbf{P}(300 \leq X \leq 320) = \sum_{i=300}^{320} B(600;\ 0,5;\ i) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{320+0,5-300}{12,25}\right) - \Phi\left(\frac{300-0,5-300}{12,25}\right) =$$

$= \Phi(1{,}673) - \Phi(-0{,}041) = \Phi(1{,}673) - (1 - \Phi(0{,}041)) =$
$= 0{,}4696.$

Pereinant nuo diskrečiojo skirstinio prie tolydžiojo reikia vietoj 350 įrašyti 350 + 0,5, vietoj 320 įrašyti 320 + 0,5 ir vietoj 300 įrašyti 300 – 0,5.

Centrinė ribinė teorema

Tarkime, kad $X_i\,(i = 1, 2, 3, ..., n)$ yra n bet kaip pasiskirsčiusių nepriklausomųjų atsitiktinių dydžių, kurių matematinės viltys μ_i ir dispersijos σ_i^2. Tada atsitiktinio dydžio $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ matematinė viltis $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ ir dispersija $\mathbf{D}X = \sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, o pats dydis X yra apytiksliai normaliai pasiskirstęs: $\mathbf{P}(X \le x) \approx \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Kai n > 30, artinys yra tinkamas. Kai X_i jau yra normaliai pasiskirstęs, X yra tiksliai normaliai pasiskirstęs.

17.15. Hipergeometrinis skirstinys

Tarkime, kad dėžėje yra N objektų, tarp kurių K objektų turi savybę T, o likusieji $N - K$ objektų turi savybę $\overline{T}$. Atsitiktinai atrenkant iš jų n objektų, atskirų objektų atrinkimai nebūtinai yra nepriklausomi.

Atsitiktinis dydis X apibūdina imties objektų, turinčių savybę T, skaičių k. Dydžio X tikimybių skirstinys vadinamas hipergeometriniu skirstiniu H.

Hipergeometrinis skirstinys:

$$H(N;\ K;\ n;\ k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n};$$

čia k = 0, 1, 2, 3, ..., n.

Pavyzdys. N = 10, K = 6, n = 4. Tikimybė, jog k = 2 imties objektai turi savybę T, yra tokia:

$$H(10;\ 6;\ 4;\ 2) = \frac{C_6^2 \cdot C_{10-6}^{4-2}}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}.$$

17.16. Imtys

Imtis yra atsitiktinai išrinktas bet kuris tikrasis generalinės aibės poaibis.

Norint garantuoti, kad išrinkimas tikrai atsitiktinis, yra įvairių imties sudarymo būdų. Pavyzdžiui, galima generalinės aibės elementus sunumeruoti ir elementus išrinkti pagal atsitiktinių skaičių lentelę. Aibė, sudaryta iš elementų su išrinktais numeriais, yra generalinės aibės imtis. Toks metodas suteikia vienodas galimybes generalinės aibės objektui patekti į imtį, be to, kiekvienas imties elementas bus išrinktas esant tai pačiai tikimybei. Tai, jog imtį sudaro n išrinktų objektų, atitinka n eksperimento „Objekto išrinkimas“ baigčių. Toks atsitiktinis išrinkimas garantuoja šių n baigčių nepriklausomumą.

Prieš pradedant generalinę aibę vertinti pagal charakteristikas, gautas iš imties, imtis turi būti pratestuota. Tam taikomos gerai žinomos generalinės aibės, iš kurių elementų išrenkama imtis ir sudaromas požymio dažnių skirstinys. Šis skirstinys (empirinis skirstinys) palyginamas su prieš tai apskaičiuotu požymio tikimybių skirstiniu. Kai šie skirstiniai leistinų paklaidų ribose neabejotinai persidengia, imties išrinkimo metodas yra tinkamas. Kartais pakanka palyginti abiejų skirstinių parametrus.

Tada atsitiktinė imtis naudojama įvertinant generalinę aibę. Pavyzdžiui, kai tam tikras požymis būdingas m imties elementų, galima įvertinti jog tas pats požymis būdingas M generalinės aibės elementų. Arba pagal požymio vidurinę reikšmę, apskaičiuotą imčiai, galima įvertinti, kokia bus nežinoma to paties požymio vidurinė reikšmė generalinėje aibėje.

Uždaviniai

1. Trupmenos $\frac{69\,300}{193\,050}$ skaitiklį ir vardiklį išskaidykite pirminiais daugikliais ir kiek įmanoma suprastinkite.

2. Reiškinį $(u-2v)^6$ išskleiskite pritaikę Niutono binomo formulę ir Paskalio trikampį.

3. Kokia yra šių lygčių apibrėžimo aibė ir sprendinių aibė:

   a) $\frac{10}{6x-2}=\frac{10}{3x+4}$;

   b) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+5}=\frac{4}{10}$?

4. Raskite nelygybių sprendinių aibes:

   a) $\frac{x-4}{x+5}\geq 6$;

   b) $x^2-3x-4<0$.

5. Išspręskite lygčių sistemas:

   a) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=16; \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 5x+3y=-1; \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x-y+2z=-5, \\ -2x+y-z=0, \\ 3x+4y+z=7. \end{cases}$

6. Panaikinkite iracionalumą vardiklyje: $\frac{5}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$.

7. Suprastinkite reiškinį $\left(\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt[3]{m^2}}\right)^4$.

8. Išspręskite šias rodiklines lygtis:

a) $3^{4x} \cdot 9^{-x-2} = 27 \cdot 3^{4x+1}$;

b) $4^{2x} - 16{,}25 \cdot 4^{x} + 4 = 0$.

9. Išspręskite logaritminę lygtį
$\lg(x-8) + \lg(x+2) = \lg(2x+4)$.

10. Kurie šių sąryšių yra funkcijos:

a) $G = \{(a;\ 1), (b;\ 1), (c;\ 1), (d;\ 2)\}$;

b) $G = \{(1;\ x), (2;\ y), (3;\ x), (3;\ y)\}$;

c) $G = \left\{(1;\ 1), (1;\ -1), \left(2;\ \sqrt{2}\right), \left(2;\ -\sqrt{2}\right)\right\}$;

d) $G = \{(1;\ 5), (2;\ 10), (3;\ 5), (3;\ 10)\}$;

e) $G = \{(2;\ 5), (3;\ 5), (4;\ 5), (5;\ 5)\}$?

11. Tiesinė funkcija apibūdinama lygtimi $3x - 4y + 6 = 0$. Apskaičiuodami patikrinkite, ar taškai $P(0;\ 1{,}5)$ ir $Q(1{,}5;\ 3{,}5)$ priklauso funkcijos grafikui.

12. Tiesė g eina per tašką $P(-1;\ 0)$ ir yra lygiagreti su tiese h, nusakoma lygtimi $h(x) = 3x + 1$. Parašykite tiesės g lygtį.

13. Pakeitę lygtį $f(x) = x^2 + 4x + 7$ dvinario kvadratu, raskite viršūnės koordinates.

14. Nurodyta funkcijos lygtis $y = 2x^2 - 6x - 8$. Raskite grafiko susikirtimo su ašimis Ox ir Oy taškus.

15. Suraskite nulius ir ištirkite jų kartotinumą:

a) $f(x) = 3x^4 + x^3$;

b) $f(x) = 2(x-1)^2 (x+2)^3 (x-2)$.

16. Suraskite nulius (ištirkite jų kartotinumą), polius (ištirkite jų eilę) ir lakūnas: $f(x)=\dfrac{4(x^2-1)(x+1)^2}{(x-1)(x-3)^2x^3}$.

17. Funkciją, kurioje yra modulio ženklas, pakeiskite funkcija, apibrėžta atskiruose intervaluose:
$f(x)=x|x-1|^2-3|x-1|,\ x\in \boldsymbol{R}$.

18. Aritmetinės progresijos pirmasis narys lygus 7, skirtumas lygus 3 ir n-tasis narys lygus 28. Suraskite progresijos narių skaičių ir apskaičiuokite tų n narių sumą.

19. Geometrinės progresijos pirmasis narys 5, vardiklis 0,5.
a) Raskite pirmuosius 4 šios progresijos narius.
b) Raskite aštuntąjį narį.
c) Apskaičiuokite pirmųjų aštuonių narių sumą.

20. Apskaičiuokite ribą
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$.

21. 20 000 € indėlis padėtas į banką, kuris už jį priskaičiuoja sudėtinius procentus. Koks bus indėlio dydis po aštuonerių metų, jeigu palūkanų norma lygi 4,5 %?

22. Lygiakraščio trikampio plotas $S=4\sqrt{3}$. Apskaičiuokite aukštinę, apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų spindulius.

23. Stačiojo trikampio aukštinė h = 4 cm ir aukštinės įžambinėje atkirsta atkarpa q = 2 cm. Apskaičiuokite trikampio kraštines ir jo plotą.

24. Stačiakampio plotas S = 40 cm^2, jo kraštinė a = 8 cm. Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą ir jo įstrižainių ilgius.

25. Kvadrato plotas lygus S. Raskite jo įstrižainės ilgį ir perimetro priklausomybę nuo S.

26. Skritulio išpjovos spindulys lygus 5 cm, centrinis kampas lygus 123°.

a) Apskaičiuokite išpjovos plotą.

b) Apskaičiuokite išpjovos lanko ilgį.

c) Koks būtų tokio pat spindulio išpjovos centrinis kampas, jeigu lankas būtų dvigubai ilgesnis?

27. Atkarpa padalyta aukso pjūviu. Didesniosios dalies ilgis 6 cm. Koks atkarpos ilgis?

28. Pasitelkę brėžinį įrodykite, jog $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ir $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

29. Trikampio kampas $\alpha = 55°$, kraštinės $a = 7{,}5$, $b = 4$. Apskaičiuokite kampą β ir kraštinę c.

30. Tetraedro tūris $V = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Apskaičiuokite paviršiaus plotą, aukštinę, apibrėžtinio ir įbrėžtinio rutulių spindulius.

31. Į ritinį, kurio spindulys r, įbrėžtas rutulys.

a) Koks yra ritinio ir rutulio tūrių santykis?

b) Koks yra ritinio ir rutulio paviršių plotų santykis?

32. Kvadrato $ABCD$ svorio centras yra S, $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$. Vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ išreikškite nurodytais vektoriais.

33. Tarp pateiktų vektorių yra du kolinearieji ir trys nekomplanarieji. Kurie tai vektoriai?

$\vec{v_1} = (1;\ -2;\ 3)$, $\vec{v_2} = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{v_3} = (-2;\ 4;\ -6)$, $\vec{v_4} = (-1;\ 5;\ -6)$.

34. Nurodyti vektoriai: $\vec{v_1} = (0{,}5;\ 0;\ -2)$, $\vec{v_2} = (-1;\ 0;\ 4)$.

a) Apskaičiuokite jų modulius.

b) Kokį kampą sudaro šie vektoriai vienas su kitu?

35. Nurodytos dvi tiesės. Ištirkite, ar jos susikerta. Jeigu taip, raskite susikirtimo tašką.

$g_1: \vec{r} = (-1;\ 7;\ 1) + \lambda \cdot (-1;\ 2;\ 0),$

$g_2: \vec{r} = (1;\ 1;\ 2) + \mu \cdot (0;\ -2;\ 1).$

36. Nurodyta plokštuma E, kurios lygtis yra tokia: $\vec{r} = (1;\ 0;\ 1) + \lambda \times$ $\times (2;\ 3;\ 1) + \mu \cdot (-1;\ -2;\ 1)$. Šią lygtį pertvarkykite taip, kad iš jos būtų aiškus plokštumos normalusis vektorius ir taškas, per kurį plokštuma eina.

37. Raskite pirmąją šių funkcijų išvestinę:

a) $f(x) = 5kx^3 - 4x^2 + 2x + 1$, kai $k > 0$;

b) $f(x) = (3x^3 + 1)\sqrt{x+1}$;

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$;

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$.

38. Nurodyta trečiojo laipsnio sveikoji racionalioji funkcija $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 12x^2 + 36x)$. Raskite grafiko aukščiausiojo, žemiausiojo ir perlinkio taško koordinates.

39. Apskaičiuokite apibrėžtinį integralą:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4}\right) dx.$$

Sprendimai

1. $\frac{69\,300}{193\,050}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 11\cdot 13}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 13}=\frac{14}{39}.$

2. $(u-2v)^6=u^6-6\cdot u^5\cdot 2v+15\cdot u^4\cdot 4v^2-20\cdot u^3\cdot 8v^3+15\cdot u^2\cdot 16v^4-$
$-6\cdot u\cdot 32v^5+64v^6=u^6-12u^5v+60u^4v^2-160u^3v^3+240u^2v^4-$
$-192uv^5+64v^6.$

3. a) $\frac{10}{6x-2}=\frac{10}{3x+4}\Leftrightarrow 10(3x+4)=10(6x-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+4=6x-2\Leftrightarrow 6=3x\Leftrightarrow 2=x\Rightarrow$ sprendinių aibė $\{2\}$,

$D=\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$;

b) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+5}=\frac{4}{10}\Leftrightarrow\frac{x+5-x+3}{(x-3)(x+5)}=\frac{4}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{8}{x^2+2x-15}=\frac{4}{10}\Leftrightarrow 80=4x^2+8x-60\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+8x-140=0$ (kvadratinės lygties sprendinių formulė)

$\Leftrightarrow x=5\vee x=-7\Rightarrow$ sprendinių aibė $\{7,\ 5\}$,

$D=\boldsymbol{R}\setminus\{-5,\ 3\}$.

4. a) $\frac{x-4}{x+5}\geq 6\Leftrightarrow\frac{-5x-34}{x+5}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x-34\geq 0\wedge x+5>0\vee -5x-34\leq 0\wedge x+5<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ sprendinių aibė $[-6{,}8;\ -5)$;

b) $x^2-3x-4<0\Leftrightarrow(x-4)(x+1)<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-4>0\wedge x+1<0\vee x-4<0\wedge x+1>0\Rightarrow$ sprendinių aibė $(-1;\ 4)$.

5. a) Sprendinių aibė $\{(4;\ 4)\}$;
b) sprendinių aibė $\{(1;\ -2)\}$;
c) sprendinių aibė $\{(2;\ 1;\ -3)\}$.

6. $\dfrac{5}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2(3-2)}=\dfrac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2}.$

7. $\left(\dfrac{\sqrt{m}\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt[3]{m^2}}\right)^4=\dfrac{m^2\cdot n^{\frac{4}{3}}}{n\cdot m^{\frac{8}{3}}}=m^{2-\frac{8}{3}}\cdot n^{\frac{4}{3}-1}=\sqrt[3]{\dfrac{n}{m^2}}.$

8. a) $3^{4x}\cdot 9^{-x-2}=27\cdot 3^{4x+1}\Leftrightarrow 3^{4x}\cdot 3^{-2x-4}=3^3\cdot 3^{4x+1}\Rightarrow$

(laipsnių rodiklių sulyginimas) $\Rightarrow 4x-2x-4=3+4x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-4;$

b) $4^{2x}-16,25\cdot 4^x+4=0;\ \ 4^x=z$ (keitinys),

$z^2-16,25z+4=0\Leftrightarrow z=\dfrac{16,25\pm\sqrt{16,25^2-16}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=16\vee z=0,25,$

1 atvejis: $4^x=16\Rightarrow x=2,$

2 atvejis: $4^x=0,25\Rightarrow x=-1.$

9. $\lg\left((x-8)(x+2)\right)=\lg\left(2x+4\right)\Leftrightarrow(x-8)(x+2)=2x+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-8x-20=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=10.$

Patikrinus įsitikinama, kad lygčiai tinka $x = 10$.

10. a) Funkcija;

b) nėra funkcija;

c) nėra funkcija;

d) nėra funkcija;

e) funkcija.

11. Įrašius $P(0;\ 1{,}5)$ į lygtį, gaunama $0 = 0$, P priklauso grafikui. Įrašius $Q(1{,}5;\ 3{,}5)$ į lygtį, gaunama $-9{,}5 = 0$, Q nepriklauso grafikui.

12. $f(x)=3x+3.$

13. $S(-2;\ 3)$.

14. Grafikas ašį Ox kerta taškuose (–1; 0) ir (4; 0), o ašį Oy – taške (0; –8).

15. a) $x = 0$, trečiojo kartotinumo; $x=-\frac{1}{3}$, paprastas;

b) $x = 1$, antrojo kartotinumo; $x = -2$, trečiojo kartotinumo; $x = 2$, paprastas.

16. Nulis yra $x = -1$, trečiojo kartotinumo; $x = 1$, paprastas. Polius yra $x = 0$ (trečiosios eilės), $x = 3$ (antrosios eilės). Lakūna yra $x = 1$.

17. $f(x)=\begin{cases} x\left(x^2-2x+1\right)-3x+3, & x\geq 1, \\ x\left(x^2-2x+1\right)+3x-3, & x<1. \end{cases}$

18. $n=8,\ S_8=140.$

19. a) 5; 2,5; 1,25; 0,625;

b) $a_8=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}=0{,}0390625;$

c) $s_8=\dfrac{5\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{2}}=9{,}9609375.$

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{x+2}=\dfrac{7}{4}.$

21. Kaupiamasis daugiklis $q = 1 + \frac{4,5}{100} = 1,045.$

Kapitalas po aštuonerių metų bus toks: $K_8 = 20000 \cdot 1,045^8$ € = = 28 442,01 €.

22. $4\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4;$

$h = \frac{4}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3,46;$

$R = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2,31,\ r = \frac{4}{6}\sqrt{3} \approx 1,15.$

23. $h^2 = pq \Rightarrow p = \frac{h^2}{q} \Rightarrow p = \frac{16}{2}$ cm = 8 cm;

$c = p + q \Rightarrow c = 2 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 10 \text{ cm};$

$a^2 = pc \Rightarrow a^2 = 8 \cdot 10 \text{ cm}^2 \Rightarrow a \approx 8,94 \text{ cm};$

$b^2 = qc \Rightarrow b^2 = 2 \cdot 10 \text{ cm}^2 \Rightarrow b \approx 4,47 \text{ cm};$

$S = \frac{ab}{2} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}}{2} = 20 \text{ cm}^2.$

24. $S = ab \Rightarrow b = \frac{S}{a} \Rightarrow b = \frac{40 \text{ cm}^2}{8 \text{ cm}} = 5 \text{ cm};$

$P = 2a + 2b \Rightarrow P = 2 \cdot 8 \text{ cm} + 2 \cdot 5 \text{ cm} = 26 \text{ cm};$

$e = f = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow e = \sqrt{64 + 25} \text{ cm} \approx 9,43 \text{ cm}.$

25. Kraštinė $a = \sqrt{S}$;

perimetras $P = 4\sqrt{S}$;

įstrižainė $d = a\sqrt{2} = \sqrt{S}\sqrt{2} = \sqrt{2S}$.

26. $S_{\text{išpj}} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} \Rightarrow S_{\text{išpj}} = 26,83 \text{ cm}^2;$

$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360} \Rightarrow b = 10,73$ cm.

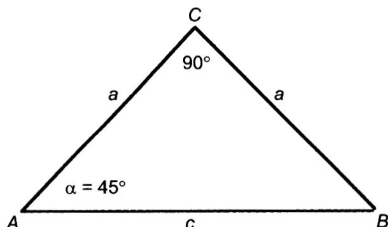
Kai lanko ilgis padvigubinamas, centrinis kampas irgi padvigubėja.

27. Atkarpa a, didesnioji dalis x.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow a^2 - ax = x^2;$$

$$a^2 - 6a - 36 = 0 \Rightarrow a \approx 9{,}7 \text{ cm}.$$

28. Sąryšiai gaunami iš lygiašonio stačiojo trikampio.



$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2};$$

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

29. $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{4 \cdot \sin 55°}{7{,}5} = 0{,}4368;$

$\beta_1 = 25{,}9° \Rightarrow \gamma_1 = 180° - 25{,}9° - 55° = 99{,}1°;$

$\beta_2 = 154{,}1°$ (netinka, nes kampų suma pasidaro didesnė už 180°);

$\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c = \dfrac{7{,}5 \cdot \sin 99{,}1°}{\sin 55°} = 9{,}04.$

30. Briauna: $\frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2.$

Paviršiaus plotas: $S = 4\sqrt{3}.$

Aukštinė: $h = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Apibrėžtinio rutulio spindulys: $R = 0{,}5\sqrt{6}$.

Įbrėžtinio rutulio spindulys: $r = \frac{1}{6}\sqrt{6}$.

31. Ritinio aukštinė lygi $2r$.

Ritinio tūris: $V_{rit} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, rutulio tūris: $V_{rut} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Santykis: $\frac{V_{rit}}{V_{rut}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}$.

Ritinio paviršiaus plotas $S_{rit} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$,

rutulio paviršiaus plotas $S_{rut} = 4\pi r^2$.

Santykis: $\frac{S_{rit}}{S_{rut}} = \frac{6\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{3}{2}$.

32. $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = -2\vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$,

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = 0 \cdot \vec{a} - 2\vec{b}$.

33. $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_3$ yra kolinearieji, nes $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1$.

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ir $\vec{v}_4$ nėra komplanarieji, nes

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

$\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ir $\vec{v}_4$ nėra komplanarieji, nes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

34. a) $|\vec{v}_1| = \sqrt{0,5^2 + 0 + (-2)^2} = \sqrt{4,25}$,

$|\vec{v}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + 4^2} = \sqrt{17}$;

b) $\cos\alpha = \dfrac{0,5 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 4}{\sqrt{4,25} \cdot \sqrt{17}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$.

35. Abiejų tiesių lygčių dešiniosios pusės sulyginamos. Gaunama tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} -1 - \lambda = 1, \\ 7 + 2\lambda = 1 - 2\mu, \\ 1 = 2 + \mu; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2, \\ 3 = 3, \\ \mu = -1. \end{cases}$$

Susikirtimo taškas $P(1;\ 3;\ 1)$.

36. Plokštumos lygtis: $E : \left(\vec{r} - (1;\ 0;\ 1)\right) \cdot (5;\ -3;\ -1) = 0$.

Atstumas: $d : \vec{r} \cdot \left(\dfrac{5}{\sqrt{35}};\ \dfrac{-3}{\sqrt{35}};\ \dfrac{-1}{\sqrt{35}}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{35}} \Rightarrow d = \dfrac{4}{\sqrt{35}} \approx 0,7$.

37. a) $f'(x) = 15kx^2 - 8x + 2$ (laipsnio išvestinė, sumos išvestinė, konstantos išvestinė);

b) $f'(x) = 9x^2 \cdot \sqrt{x+1} + \left(3x^3 + 1\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(sandaugos išvestinė);

c) $f'(x) = \dfrac{\left(x^2 + 1\right) \cdot 1 - (x - 3) \cdot 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

(trupmenos išvestinė);

d) $f'(x) = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2 - 1}}$

(sudėtinės funkcijos išvestinė).

38. Aukščiausias ir žemiausias taškas:

$f'(x) = -\frac{1}{8}(3x^2 - 24x + 36)$, $f''(x) = -\frac{1}{8}(6x - 24)$,

$-\frac{1}{8}(3x^2 - 24x + 36) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6.$

$f''(2) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow$ žemiausias taškas,

$f''(6) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow$ aukščiausias taškas,

$f(2) = -\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot (-4)^2 = -4$, $f(6) = 0.$

Perlinkio taškas:

$-\frac{1}{8}(6x - 24) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$

$f'''(x) = -\frac{3}{4} \Rightarrow f'''(4) \neq 0 \Rightarrow$ perlinkio taškas,

$f(4) = -\frac{1}{8} \cdot 4 \cdot (-2)^2 = -2.$

39. $\int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4}\right)dx = \left(\frac{x^5}{20} - \frac{5x^3}{6} + \frac{9x}{4}\right)\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{20} - \frac{5}{6} + \frac{9}{4} - 0 = \frac{22}{15}.$

Priedas

1. Matematiniai ženklai ir simboliai

Loginiai ženklai

$\wedge$	ir (konjunkcija)
$\vee$	arba (disjunkcija)
$\neg$	ne (neigimas)
$\rightarrow$	jei ..., tai ... (implikacija)
$\leftrightarrow$	tada ir tik tada, kai (ekvivalentumas)

Aibės

$\{a, b, c, ...\}$	aibės užrašas išvardijant elementus
$\{x \mid x = ...\}$	aibės užrašas apibūdinant jos elementams būdingą požymį
$\in$	elementas priklauso aibei
$\notin$	elementas nepriklauso aibei
$\boldsymbol{N}$	natūraliųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{Z}$	sveikųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{Q}$	racionaliųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{I}$	iracionaliųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{R}$	realiųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{C}$	kompleksinių skaičių aibė
$\boldsymbol{Z}^+$, $\boldsymbol{Z}^-$	teigiamųjų (neigiamųjų) sveikųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{Q}^+$, $\boldsymbol{Q}^-$	teigiamųjų (neigiamųjų) racionaliųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{R}^+$, $\boldsymbol{R}^-$	teigiamųjų (neigiamųjų) realiųjų skaičių aibė
$\subset$	yra aibės poaibis
$\not\subset$	nėra aibės poaibis
$\varnothing$, $\{\}$	tuščioji aibė
$[a; b]$	uždarasis intervalas
$(a; b)$	atvirasis intervalas
$(a; b]$, $[a; b)$	pusiau atvirieji intervalai
$A \cup B$	aibių sąjunga, A arba B

$A \cap B$	aibių sankirta, A ir B
$A \setminus B$	aibių skirtumas, A, bet ne B
$A \times B$	aibių sandauga
D_n	skaičiaus n daliklių aibė
K_n	skaičiaus n kartotinių aibė

Teiginio funkcijos

$p, q, r, \ldots$	teiginiai
$A_1(x),\ A_2(x)$	teiginio funkcijos
$A_1(x) \wedge A_2(x)$	teiginio funkcijų konjunkcija
$A_1(x) \vee A_2(x)$	teiginio funkcijų disjunkcija
$A_1(x) \Rightarrow A_2(x)$	teiginio funkcijų implikacija
$A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)$	teiginio funkcijų ekvivalentumas
$\overline{A(x)}$	teiginio funkcijos neiginys
G	pagrindinė aibė
D	apibrėžimo sritis
L	sprendinių aibė
$T_1(x),\ T_2(x)$	kintamojo x reiškiniai

Pagrindiniai dėsniai

P	perstatomumo dėsnis
J	jungiamumo dėsnis
N	neutraliojo elemento egzistavimas
A	atvirkštinio elemento egzistavimas
S	skirstomumo dėsnis

Sąryšiai

ρ	sąryšis
$f : x \to f(x),\ x \in D$	funkcija, kurios apibrėžimo sritis D
$f^*,\ f^{-1}$	atvirkštinė funkcija
D	apibrėžimo sritis
E	reikšmių aibė
$f : A \to B$	funkcija, apibrėžta kaip atvaizdis
G	funkcijos grafikas
$y = f(x)$	funkcijos lygtis

Skaičiai

$=$	lygu
$\neq$	nelygu
$<$	mažiau
$\leq$	mažiau arba lygu
$>$	daugiau
$\geq$	daugiau arba lygu
DBD(a, b)	didžiausias bendrasis a ir b daliklis
MBK(a, b)	mažiausias bendrasis a ir b kartotinis
$\lvert a \rvert$	skaičiaus a modulis
a^n	n-tasis a laipsnis
$\sqrt{a}$	kvadratinė šaknis iš a
$\sqrt[n]{a}$	n-tojo laipsnio šaknis iš a
$\log_a x$	dydžio x logaritmas pagrindu a
$\lg x$	dešimtainis x logaritmas
$\ln x$	natūralusis x logaritmas
lb x, ld x	dydžio x logaritmas pagrindu 2
$n!$	n faktorialas
C_n^k	binominis koeficientas, derinių iš n po k skaičius
Σ	sumos ženklas
Π	sandaugos ženklas
i	menamasis vienetas
$\bar{a}$	kompleksinio skaičiaus a jungtinis skaičius

Analizė

$\to \pm\infty$	artėja prie plius arba minus begalybės
$\frac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$	pirmoji išvestinė
$\frac{d^n y}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$	n-toji išvestinė
Δ	pokytis
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	sekos riba
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	funkcijos riba

$\int f(x)\mathrm{d}x$	neapibrėžtinis integralas
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	apibrėžtinis integralas
$\sin \varphi$	kampo φ sinusas
$\cos \varphi$	kampo φ kosinusas
$\mathrm{tg}\ \varphi$	kampo φ tangentas
$\mathrm{ctg}\ \varphi$	kampo φ kotangentas
$\arcsin \varphi$	arksinusas
$\arccos \varphi$	arkkosinusas
$\mathrm{arctg}\ \varphi$	arktangentas
$\mathrm{arcctg}\ \varphi$	arkkotangentas
exp	eksponentinė funkcija

Matricos, determinantai

A, B, C, M	matricos
O	nulinė matrica
E	vienetinė matrica
a_{mn}	matricos m-tosios eilutės ir n-tojo stulpelio sankirtoje esantis elementas
$\mid\ \mid, \Delta, \Delta_x$	determinantai

Geometrija

$A, B, C, ..., P, Q, R$	taškai
g, h, k	tiesės
E	plokštuma
S	plotas
V	tūris
P	perimetras
AB	tiesė, einanti per taškus A ir B
AB	atkarpa nuo A iki B
AB	atkarpos AB ilgis
$P \in g$	P yra tiesėje g
$g \cap h = \{S\}$	S yra g ir h susikirtimo taškas
$E \cap F = g$	g yra plokštumų E ir F susikirtimo linija
$g \perp h$	g yra statmena h

$g \parallel h$	*g* yra lygiagreti su *h*
$\angle$	kampas
$\angle ASB$	kampas, kurio viršūnė *S*
α, β, γ	kampai

Vektoriai

$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$	vektoriai
$\lvert\vec{a}\rvert$	vektoriaus modulis
$\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$	vektorius, išreikštas koordinatėmis
Ox_1, Ox_2, Ox_3	koordinačių ašių žymenys (vietoj *Ox*, *Oy*, *Oz*)
$\vec{a}^0$	vienetinis vektorius (ortas)
$n \cdot \vec{a}$	vektoriaus ir skaičiaus sandauga
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	skaliarinė sandauga
$\vec{a} \times \vec{b}$	vektorinė sandauga

Stochastika

x_n	požymio realizacija (požymio reikšmė)
f_n	absoliutusis dažnis
h_n	santykinis dažnis
s_n	sukauptasis dažnis
$\overline{x}$	vidurkis
s^2	vidutinis kvadratinis nuokrypis
s	standartinis nuokrypis
X, Z	atsitiktiniai dydžiai
$\mathbf{E}X$, μ	matematinė viltis
$\mathbf{D}X$, σ^2	dispersija
σ	standartas
$\mathbf{P}(E)$	įvykio tikimybė
$\mathbf{F}(x)$	tikimybių funkcija
Ω	elementariųjų įvykių erdvė

2. Romėniškieji skaitmenys

1 – I	20 – XX	200 – CC	1500 – MD
2 – II	30 – XXX	300 – CCC	1900 – MCM
3 – III	40 – XL	400 – CD	1940 – MCMXL
4 – IV	50 – L	500 – D	1949 – MCMIL
5 – V	60 – LX	600 – DC	1990 – MXM
6 – VI	70 – LXX	700 – DCC	1991 – MIXM
7 – VII	80 – LXXX	800 – DCCC	2000 – MM
8 – VIII	90 – XC	900 – CM	2050 – MML
9 – IX	100 – C	1000 – M	2060 – MMLX
10 – X	(99 – IC)	(990 – XM)	2200 – MMCC

3. Graikiškos raidės

Α	α	a	alfa
Β	β	b	beta
Γ	γ	g	gama
Δ	δ	d	delta
Ε	ε	e	epsilon
Ζ	ζ	d	dzeta
Η	η	e	eta
Θ	θ	t	teta
Ι	ι	j	jota
Κ	κ	k	kapa
Λ	λ	l	lambda
Μ	μ	m	mi
Ν	ν	n	ni
Ξ	ξ	k	ksi
Ο	ο	o	omikron
Π	π	p	pi
Ρ	ρ	r	ro
Σ	σ	s	sigma
Τ	τ	t	tau
Υ	υ	i	ipsilon
Φ	φ	f	fi
Χ	χ	ch	chi
Ψ	ψ	ps	psi
Ω	ω	o	omega

Dalykinė rodyklė

A

Abelio grupė 47, 263
  adicinė matricų – 79
  adicinė vektorių – 263
Adjunktas 74
Afinusis posūkis su ištempiu 299
Aibė 16
  apibrėžimo – 24, 103
  generalinė – 324
  liekamoji – 19
  lygties sprendinių – 55
  pagrindinė – 21
  teiginio funkcijos sprendinių – 21
Algebrinis reiškinys 50
Amortizacija 159
Antikomutatyvumas 274
Aplinka 85
Apskritimas 191
  Apolonijaus – 232
  fiksuotasis – 197
  Talio – 201
  vienetinis – 234
Apvalinimas su pertekliumi 43
Apvalinimas su trūkumu 43
Archimedo savybė 85
Aritmetika 25
Aritmetinis vidurkis
  paprastasis – 331
  svertinis – 331
Asimptotė 155
Ašis
  didžioji elipsės – 294
  realioji hiperbolės – 295
Atėminys 27
Atimtis 26, 39
Atkarpa 190
Atkarpos dalijimas nurodytuoju santykiu 225
Atranka
  grąžinamoji – 336
  negrąžinamoji – 336
Atsitiktiniai dydžiai 344
Atstumas tarp dviejų lygiagrečiųjų plokštumų 291
Atstumas tarp dviejų taškų 279
Atvaizdis
  afinusis – 298
  kongruentusis (lygumo) – 203, 300
  panašumo – 228, 299
Aukso pjūvis 226
Aukštinė
  trapecijos – 212
  trikampio – 194

B

Balansinė vertė 159
Bazė 265
BCD kodas 174
Bijekcija 106
Binomas 51
  Niutono – 53
Binominės formulės 51
Binominis koeficientas 54

C

Centras
  apibrėžtinio apskritimo – 195
  įbrėžtinio apskritimo – 195
  svorio – 195, 273
Centrinis ištempis 227, 298

D

Dalis
  menamoji – 179
  realioji – 179

Daliklis 28
bendrasis – 31
didžiausias – – 31
Dalinys 28
Dalyba 28, 40
kompleksinių skaičių – 184
Dalmuo 28
Darbas 321
elektros srovės – 321
Daugiakampis
bet koks – 214
taisyklingasis – 214
Daugianaris 125
Daugiklis 27
Daugyba 27, 40
matricų – 80
kompleksinių skaičių – 183
Dažnis
absoliutusis – 325
įvykio – 338
santykinis – 325
Dedukcija 98
Deltoidas 211
Deriniai 343
Dešimtainis papildinys 176
Determinantas 73
Dėsnis
Boilio ir Marioto – 134
gravitacijos – 134
jungiamumo (asociatyvumo) – 15, 48, 49, 79, 274
Keplerio (trečiasis) – 135
monotoniškumo – 83
perstatomumo (komutatyvumo) – 15, 48, 49, 79
skirstomumo (distributyvumo) – 15, 48, 49, 274
sugerties (absorbcijos) – 15
Diagrama
juostinė – 327
kiekybinio požymio – 329
Oilerio – 17
rodyklinė – 46, 102
skritulinė – 327
šakotinė – 335
Veno – 17
Didysis skritulys 259
Diferencialas 302
Direktrisė 296
Disjunkcija 12, 23
griežtoji – 15
Diskriminantas 60
Dispersija 348
Dvejetainis dešimtainis kodas 174
Dvinario kvadratas 52

E
Eilutė 150
geometrinė – 151
statistinė – 325
Ekscentricitetas 294, 295
Eksperimentas
atsitiktinis – 334
kartotinis – – 335
Bernulio – 350
Laplaso – 338
Ekstremumai 310
parabolės – 123
Ekvivalentieji pertvarkiai 56
Ekvivalentumas 14, 23
Ekvivalentumo sąryšiai 46
Elementas
atvirkštinis – 48, 49
neutralusis – 48, 49
Elipsė 294
Erdvė
elementariųjų įvykių – 334
tiesinė vektorių – 263

F

Faktorialas 342
Fiksuotoji tiesė 197
Fiksuotasis taškas 197
Formulė
  logaritmo pagrindo keitimo – 95
  Muavro – 186
  Niutono ir Leibnico – 315
Formulės
  binominės (dvinario) – 51
  greitosios daugybos – 51
Funkcija
  apgręžiamoji – 115
  aprėžtoji – 111
  atvirkštinė – 115
  eksponentinė – 136
  empirinė – 104
  griežtai monotoniškai didėjanti – 109
  griežtai monotoniškai mažėjanti – 110
  išorinė – 114
  kvadratinė – 119
  laipsninė – 132
  laiptinė – 143
  logaritminė – 137
  modulio – 141
  monotoninė – 109
  pasiskirstymo – 346
  pirmykštė – 313
  pointegralinė – 313
  racionalioji – 112
  sveikoji – – 124
  trupmeninė – – 127
  rodiklinė – 136
  sveikosios dalies – 142
  tankio – 353
  teiginio – 21
  tiesinė – 116
  tolydžioji – 154
  vidinė – 114
  ženklo – 142

G

Gauso skaičių plokštuma 182
Gradas 233
Grafikas 46
  funkcijos – 103
  sąryšio – 46
Gretiniai 343
Grupė
  Abelio – 47, 263
  adicinė vektorių – 263

H

Hiperbolė 295
Hipokrato mėnuliai 223
Histograma 329

I

Įdėtieji intervalai 82
Implikacija 13, 23
Imtis 356
Indukcija 98
  matematinė (pilnoji) – 98
Infimumas 84
Injekcija 106
Integralas
  apibrėžtinis – 314
  darbo – 321
  neapibrėžtinis – 313
  netiesioginis – 318
Integravimo metodai 315
Intervalas
  atvirasis – 64
  pusiau atvirasis – 64
  uždarasis – 64
Išvestinė 303
Išvestinių skaičiavimo taisyklės 303
Įvykiai 336

nesutaikomieji – 337
papildomieji – 337
Įvykis 336
elementarusis – 337
Izotermė 134
Įžambinė 200
Įžambinės atkarpos 201

J
Jungiamumas 47, 48, 49, 79, 274
Jungtiniai kompleksiniai skaičiai 180

K
Kampai
atitinkamieji – 193
gretutiniai – 193
kryžminiai – 193
pagrindo – 199
priešiniai – 193
Kampas 192
centrinis – 217
įbrėžtinis – 216
orientuotasis – 234
Kampas tarp dviejų plokštumų 290
Kampas tarp dviejų tiesių 279
Kampas tarp tiesės ir plokštumos 290
Kampo lanko matas 234
Kampo matas 192
Kapitalo kaupimas 164
Kapitalo mažėjimas 164
Kartotinis
bendrasis – 31
mažiausias – – 31
Kaupiamasis daugiklis 135, 158
Kėliniai 342
Keturkampis 208
apibrėžtinis – 218
įbrėžtinis – 217
Kirstinė 191
Koeficientas 50
ištempio – 227, 298
panašumo – 299
tiesės krypties – 117
Kompozicija
ašinės simetrijos ir ištempio – 300
posūkio ir ištempio – 299
Konjunkcija 12, 23
Kontradikcija (prieštara) 16
Koreliacija 349
Kosinusoidė 241
Kovariacija 349
Kreivės lanko ilgis 322
Kreivumas 307
Kubas 252
Kūgio pjūviai 293
Kūgis
statusis – 257
nupjautinis – – 257
Kūnas
racionaliųjų skaičių – 49
realiųjų skaičių – 83
Kvadratas 211

L
Laipsnis 28, 88, 233
Lakūna (spraga) 128
Liečiamoji plokštuma 292
Liestinė 191, 215
Likutinė vertė 159
Lygiagrečiosios plokštumos 289
Lygiagrečiosios tiesės 281
Lygiagretainis 208
Lygčių sistema 67
Lygtis 55
apskritimo – 293
ašinė tiesės – 278
aukštesniojo laipsnio – 62
bendroji kūgio pjūvio – 297

bendroji plokštumos – 286
funkcijos – 103
iracionalioji – 64
kanoninė elipsės – 294
kanoninė parabolės – 296
kryptinė tiesės – 278
kvadratinė – 60
redukuotoji – – 60
laipsninė – 93
logaritminė – 97
normalioji plokštumos – 287
plokštumos – 284
rodiklinė – 94
sferos – 292
tiesės per du taškus – 278, 281
tiesinė – 57
trigonometrinė – 247
trupmeninė – 57
Logaritmas 95

M
Matematinė viltis 347
Matrica
diagonalioji – 78
kvadratinė – 78
nulinė – 78
priešingoji – 79–80
vienetinė – 78
Mažasis skritulys 259
Mediana 332
Metalo laužo vertė 160
Metodas
eliminavimo – 69
Gauso – – 69
indukcijos – 98
integravimo dalimis – 317
kintamojo keitimo – 67, 316
panašumo – 229
skaitinio integravimo – 319
trapecijų – 320
Minoras 74
Moda 332
Modulis 33, 84
skaičiaus – 33
realiojo – – 84
vektoriaus – 261
De Morgano taisyklės 16, 337

N
Neigimas 23
Nelygybė 64
Čebyšovo – 349
kvadratinė – 66
tiesinė – 65
trikampio – 194
trupmeninė – 65
Nulis
daugianario – 126
kvadratinės funkcijos – 122
Niutono binomas 53
Nuokrypis
absoliutusis – 333
standartinis – 333
vidutinis kvadratinis – 333

O
Operacija 47

P
Pagrindas 28, 88
Pagrindiniai brėžimo uždaviniai 197
Pagrindiniai integralai 313
Palūkanų norma 135, 157
Panašieji reiškiniai 50
Parabolė 119, 296
normalioji – 119
Paskolos grąžinimas 165
Pėdsakas
plokštumos – 291
tiesės – 291

Perstatomumas 47, 48, 49
Pilnumo aksioma 84
Piramidė 254
Pitagoro skaičiai 202
Plotas
  skritulio – 219
  trikampio – 195, 275
Ploto skaičiavimas 318
Poaibis
  netikrinis – 18
  tikrinis – 17
Polius 128
Postūmis 300
  lygiagretusis – 261
Posūkis 215, 301
Požymiai
  dalumo – 30
  kiekybiniai – 326
  kokybiniai – 325
  trikampių lygumo – 203
  trikampių panašumo – 229
Priekampis 193
Prieštara 15
Prizmė 253
Procentai
  metiniai – 157
  sudėtiniai – 137
Progresija
  aritmetinė – 144
  geometrinė – 145
    alternuojančioji – – 146
Pusašė 294, 295
Pusiaukampinė 195
Pusiaukraštinė 195
Pusplokštumė 190
Pustiesė 190

R
Radioaktyvusis skilimas 136
Realiųjų skaičių aibės pilnumas 84
Refleksyvumas 46
Reiškinys (termas) 24
  kintamųjų – 50
  racionalusis – 24
  skaitinis – 50
Renta 163
  amžinoji – 164
Rėžis 84
Riba
  funkcijos – 151
  sekos – 148
Ritinys 256
Rodiklis 28, 88
Rodiklių sulyginimas 94
Rombas 209
Rutulio išpjova 259
Rutulio nuopjova 259
Rutulio skiltis 260
Rutulio sluoksnis 260
Rutulys 258

S
Sąjunga
  aibių – 19
  įvykių – 337
Sandauga
  aibių – 20
  matricos ir realiojo skaičiaus – 79
  mišrioji vektorių – 276
  skaliarinė vektorių – 268
  vektorinė vektorių – 273
Sankirta
  aibių – 18
  įvykių – 337
Santykis
  harmoninis – 225
  skirtuminis – 302
  tolydusis – 226
Sąryšiai
  ekvivalentumo – 46

teiginių – 15
Sąspūdis 299
Savybė
Archimedo – 85
pagrindinė trupmenos – 37
Savybės
determinantų – 75
tolydžių uždarajame intervale funkcijų – 155
Seka 26, 143, 342
aprėžtoji – 147
diverguojanti – 148
konverguojanti – 148
nykstamoji – 149
skaičių – 26
Sfera 292
Simetrija 46, 126
ašinė – 196, 301
centrinė – 207, 227, 301
Sinusoidė 240
Sistema
erdvės koordinačių – 266
dešimtainė – 166
dvejetainė – 166
netiesinė – 67
šešioliktainė – 170
tiesinė – 68
Skaičius
dvejetainis – 166
iracionalusis – 82
kompleksinis – 178
menamasis – 178
mišrusis – 41
natūralusis – 25
Oilerio – 149
pirminis – 25
priešingasis – 32
racionalusis – 37
realusis – 83
sudėtinis – 25
sveikasis – 32
trupmeninis – 37
Skaičius π 220
Skaitiklis 37
Skalė
nominalioji – 328
rangų – 328
Skirstinys
binominis – 350
dažnių – 325
sukauptųjų – – 329
hipergeometrinis – 355
normalusis – 352
Puasono – 352
sugrupuotų duomenų – 326
tikimybių – 345
Skirtumas 27
aibių – 19
aritmetinės progresijos – 144
matricų – 79
vektorių – 262
Sklaidos matai 333
Skritulinė išpjova 221
Skritulinė nuopjova 222
Skritulys
didysis – 259
mažasis – 259
Spindulys 190
Sritis
apibrėžimo – 103
reikšmių – 103
Stačiakampis 210
Stačiakampis gretasienis 253
Standartas 348
Statiniai 200
Statinis momentas 252
Statmenosios tiesės 282
Struktūra 47
Sudėtis 26, 39, 262
Sukauptųjų dažnių laužtė 330

Sukinys 252, 322
Suma
kampų – 193
matricų – 79
vektorių – 262
Sumažinta degresija 162
Sumos ženklas 150
Supremumas 84
Surjekcija 106

Š
Šaknis
bet kurio laipsnio – 89
kvadratinė – 86

T
Taisyklė
kombinatorinė daugybos – 341
Kramerio – 75
Laplaso – 338
Lopitalio – 305
Mizeso – 339
Sarijaus – 73
Simpsono – 251
Taisyklės
De Morgano – 16
skliaustų – 21
Tangensoidė 242
Taškai
ekstremumo – 306
grafikų susikirtimo – 123
susikirtimo su ašimis – 122
Taškas
atkarpos dalijimo – 280
aukščiausiasis – 306
fiksuotasis – 197
izoliuotasis – 85
perlinkio – 307
ribinis (sankaupos) – 85
Taško atstumas iki plokštumos 287
Tautologija 16
Teiginys 11
Teorema
aukštinės – 201
Bejeso – 341
centrinė ribinė – 355
daugybos – 340
Ferma – 311
Kavaljerio – 251
kirstinės – 231
kosinusų – 245
Lagranžo – 312
liestinės – 232
Oilerio briaunainio – 251
pagrindinė algebros – 189
Pitagoro – 201
projekcijų – 247
Ptolemėjo – 218
Rolio – 312
sinusų – 245
stygų – 231
Talio – 224
Vieto – 61
Teoremos
Guldino – 252, 323
panašumo – 229
statinių – 201
sudėties – 243, 339
vidurinių reikšmių – 311
Tetrada 172
Tetraedras 255
Tiesė 118, 190
dviejų plokštumų susikirtimo – 289
fiksuotoji – 197
Tiesinė vektorių erdvė 263
Tiesinis vektorių priklausomumas 264

Tikimybė 338
sąlyginė – 340
Tolydumas 153
Tolydumas intervale 154
Tranzityvumas 46
Trapecija 212
lygiašonė – 213
kreivinė – 318
Trigonometrinė kompleksinių skaičių forma 183
Trigonometrinės funkcijos
bet kokio kampo – 245
pirmojo ketvirčio kampų – 238
stačiojo trikampio – 235
Trikampio aukštinė 194
Trikampio elementai 194
Trikampis 193
lygiakraštis – 200
lygiašonis – 199
Paskalio – 54
posvyrio – 117
statusis – 200
Trikampių brėžimas 203
Trupmena 37
atvirkštinė – 40
dešimtainė – 41
baigtinė – – 41
begalinė periodinė – – 41
grynoji periodinė – – 42
mišrioji periodinė – – 42
menamoji – 37
netaisyklingoji – 37
pagrindinė – 37
taisyklingoji – 37
Turinys 27

U
Urnų modelis 336

V
Vardiklis 37
mažiausiasis bendrasis – 39
Veidrodinis atspindys ašies atžvilgiu 196
Veidrodinis atspindys taško atžvilgiu 207
Vektoriai
baziniai – 265
kolinearieji – 262
komplanarieji – 262
ortogonalieji – 271
priešingieji – 262
Vektorius
normalusis – 285
spindulys – 261
vienetinis – 261, 266
normalusis – – 286
Vertė
balansinė – 159
metalo laužo – 160
Vidurinė linija 213
Vidurio statmuo 195
Vienetai
greičio – 45
ilgio – 44
laiko – 44
masės – 44
piniginiai – 45

Ž
Ženklas
sandaugos – 372
sumos – 150
Židinys 294
Žiedas
skritulinis – 223
sveikųjų skaičių – 48